А.П. Стахов

Конструктивная (алгоритмическая) теория измерения, системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии

Алгебру и Геометрию постигла одна и та же участь. За быстрыми успехами в начале следовали весьма медленные и оставили науку на такой ступени, где она еще далека от совершенства. Это произошло, вероятно, от того, что Математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою.

Николай Лобачевский

Часть 3. Математическая модель измерения. Оптимальные ($n,k,0$)-алгоритмы и классические позиционные системы счисления

Если рассмотреть историю математики с момента ее зарождения, то, согласно А.Н. Колмогорову, ее развитие стимулировалось практическими потребностями в ***счете****, что привело к открытию позиционного принципа представления чисел (Вавилонская 60-ричная система счисления) и «созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел» (А.Н. Колмогоров), и в* ***измерении,*** *что вызвало «развитие начатков геометрии» (А.Н. Колмогоров) и привело к открытию «несоизмеримых отрезков». Однако, согласно* ***«гипотезе Прокла»****, создание древнегреческой математики, которая лежит в основе современной математики, осуществлялось под мощным влиянием* ***«идеи гармонии»*** *- главной идеи древнегреческой науки. Наиболее ярко это влияние отразилось в «Началах» Евклида, главной целью которых стало создание завершенной геометрической теории* ***Платоновых тел****, выражавших в древнегреческой науке «гармонию Мироздания». В настоящей статье обсуждаются три новые математические теории, которые возникли в современной науке в развитие трех фундаментальных проблем, лежащих в основании математики - счета, измерения и гармонии:* ***алгоритмическая теория измерения****,* ***системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии****. В основе алгоритмической теории измерения (АТИ) лежит абстракция потенциальной бесконечности, то есть, она является* ***конструктивной математической теорией измерения*** *(без аксиомы Кантора). Предметом исследований в АТИ являются оптимальные, то есть, наилучшие в определенном смысле алгоритмы измерения. Основным математическим результатом АТИ является синтез новых, неизвестных ранее алгоритмов измерения, которые порождают новые, неизвестные ранее позиционные системы счисления. Наиболее неожиданными результатами АТИ являются так называемые* ***биномиальные алгоритмы измерения****, основанные на «арифметическом квадрате» (треугольнике Паскаля), и* ***фибоначчиевые алгоритмы измерения,*** *которые привели к открытию новых числовых последовательностей, названных* ***р-числами Фибоначчи****. Фибоначчиевы алгоритмы измерения лежат в основе* ***р-кодов Фибоначчи*** *– новых способов позиционного представления натуральных чисел, которые являются обобщением классической двоичной системы. Эти позиционные представления были положены в основу нового направления в компьютерной науке –* ***компьютеров Фибоначчи*** *(65 патентов США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канады и др. стран).* ***Системы счисления с иррациональными основаниями (коды золотой р-пропорции)*** *являются новыми способами позиционного представления действительных чисел. Они переворачивают наши традиционные представления о системах счисления и могут быть положены в основу* ***«золотой» теории чисел.*** *Наконец,* ***«математика гармонии»,*** *включающая в себя АТИ и коды золотой* *пропорции, является новым междисциплинарным направлением современной науки, которое может быть положено в основу новой математики, лишенной противоречий.*

Статья состоит из 8 частей:

1. *Роль измерения в развитии науки*
2. *Математическая теория измерения и проблема бесконечности*
3. *Математическая модель измерения. Оптимальные (n,k,0)-алгоритмы и классические позиционные системы счисления*
4. *Биномиальные алгоритмы измерения как источник биномиальных систем счисления*
5. *Задача Баше-Менделеева, принцип асимметрии измерения, фибоначчиевые алгоритмы измерения и р-коды Фибоначчи*
6. *Системы счисления с иррациональными основаниями как основа ««золотой» теории чисел*
7. *Математика гармонии: наиболее яркие страницы*
8. *Основные математические результаты, приложения и перспективы развития «математики гармонии»*

1. Конструктивный подход к созданию математической теории измерения

В рамках конструктивного подхода к созданию математической теории измерения понятие «актуальной бесконечности» должно быть исключено из рассмотрения в силу его внутренней противоречивости («завершенная бесконечность»).

Идеи современных математиков-конструктивистов, восходящие к знаменитому заявлению **Гаусса**: *"Я возражаю … против употребления бесконечной величины как чего-либо завершенного, что никогда не позволительно в математике: можно лишь говорить о пределах, к которым некоторые величины приближаются как угодно близко, или о неограниченно возрастающих величинах"*, - приводят к мысли о возможности построения математической теории измерения на основе интуитивной, "практической" идеи о *конечности* измерительного процесса, согласно которой всякое измерение завершается за конечное число шагов, и конструктивной идеи *потенциальной осуществимости*, в соответствии с которой мы отвлекаемся от ограниченности наших возможностей в выборе средств и количества измерительных шагов (т.е. количество измерительных шагов может быть установлено как угодно большим и всегда существует потенциальная возможность для совершения следующего шага измерения).

Такое, на первый взгляд, незначительное изменение в подходе приводит к переосмысливанию самих задач математической теории измерения. При теоретико-множественном подходе измерение ведется "до точки", т.е. до абсолютно точного совпадения измеряемого и измеряющего отрезков (возможность такого абсолютно точного измерения вытекает из аксиомы Кантора). При конструктивном подходе измерение никогда не доходит "до точки", а результатом измерения всегда является некоторый отрезок, некоторый интервал неопределенности относительно истинного значения измеряемой величины. С увеличением числа шагов измерения этот интервал сужается и может быть сделан как угодно малым, но *никогда этот интервал не превращается в точку*.

В своей известной работе "О философии математики" [1] **Герман Вейль** следующим образом выражает различие между классическим и конструктивным представлениями о континууме:

"Современному анализу континуум представляется в виде множества его точек, в континууме он видит лишь частный случай основного логического отношения элемента и множества. Но поразительно, что столь же фундаментальное отношение целого и части до сих пор не находило себе места в математике! Между тем обладание частями есть основное свойство континуума и брауеровская теория … кладет это отношение в основание математического изучения континуума. В этом заключается собственно основание сделанной выше … попытки исходить не из точки, а из интервалов, как из первичных элементов построения".

Одним из моментов в теоретико-множественной теории измерения является выбор способа или алгоритма измерения, задающего систему счисления, в которой нумеруется число (результат измерения). При бесконечном числе шагов измерения, т.е. при измерении "до точки", алгоритм не влияет на конечный результат измерения и поэтому проблема способов, алгоритмов измерения как серьезная математическая проблема здесь не возникает. Выбор алгоритма в значительной степени носит произвольный характер и, как правило, сводится к «десятичному» или «двоичному» алгоритму.

При конечном числе шагов измерения, т.е. при измерения "до интервала" [1], между алгоритмами измерения появляется *различие* в достигаемой с их помощью "точности" измерения, под которой в данном случае понимается отношение исходного интервала неопределенности к интервалу неопределенности на последнем, завершающем шаге измерения. При таких условиях вступает в действие вторая конструктивная идея об "эффективности" алгоритмов измерения, а задача синтеза "эффективных" или "оптимальных" алгоритмов измерения и выдвигается в качестве центральной задачи конструктивной (алгоритмической) теории измерения [2,3].

Таким образом, конструктивный подход к теории измерения приводит нас к формулировке задачи, которая, по существу, никогда не рассматривалась в математике, как серьезная математическая задача – **задаче поиска «оптимальных» алгоритмов измерения.** Решение такой задачи привело к развитию *алгоритмической теории измерения* [2,3], которую можно рассматривать как конструктивное направление в математической теории измерения.

2. Математическая модель измерения

2.1. *Понятие «индикаторного элемента» (ИЭ)*

Ставя задачу создания «алгоритмической теории измерения», необходимо еще раз уточнить, что же такое *измерение*, каковы его цели, что такое *алгоритм измерения* и какие средства используются для его реализации.

Прежде всего, заметим, что если мы хотим что-то измерять, мы должны знать объект измерения и диапазон измеряемых величин. Одно дело измерять космические расстояния, например расстояние от Земли до Солнца, и совершенно другое - измерять атомные расстояния. Однако, когда мы переходим к «математическому измерению», мы отвлекаемся от физической природы измеряемых величин; при этом для всех случаев мы будем представлять *диапазон измерения* в виде геометрического отрезка AB. Ясно, что измеряемая величина есть одна из возможных величин, принадлежащих этому диапазону, то есть, до начала измерения существует некоторая «неопределенность» относительно измеряемой величины, иначе измерение было бы бессмысленным. Эту ситуацию «неопределенности» мы будем изображать с помощью «неизвестной» точки X, находящейся на отрезке AB .

И теперь мы можем сформулировать цель измерения. Цель измерения состоит в том, чтобы определить длину отрезка AX. На практике эта цель реализуется с помощью специальных устройств, например, рычажных весов или «компараторов». «Компараторы» осуществляют сравнение измеряемой величины с некоторой «эталонной величиной» или «мерой», сформированной из «единицы измерения» и в зависимости от результата сравнения выдают нам информацию об измеряемой величине. Таким образом, суть измерения сводится к последовательным *сравнениям* измеряемой величины с некоторыми «мерами», которые мы формируем на каждом шаге измерения.

Чтобы промоделировать процесс сравнения измеряемого отрезка AX с «мерой» AC, в книге [2] введено важное понятие *«индикаторного элемента»* (ИЭ), который является своеобразной моделью «компаратора» или «рычажных весов», основных средств любого измерения. Будем считать, что каждый ИЭ может быть приложен к любой «известной» нам точке C отрезка AB, то есть, мы можем сформировать любую «меру» в процессе измерения. «Индикаторный элемент» дает нам информацию о взаимном расположении «неизвестной» точки X и «известной» точки C. Если ИЭ находится справа от точки X, он «индицирует» двоичный сигнал 0; в противном случае – двоичный сигнал 1.

2.2. *«Индикаторная» модель измерения*

Для решения задач синтеза оптимальных n-шаговых алгоритмов измерения построим следующую математическую модель измерения (Рис. 1). Пусть на отрезке AB находится «неизвестная» точка X. Длина отрезка AX определяется с помощью системы, состоящей из k «индикаторных элементов» (ИЭ).

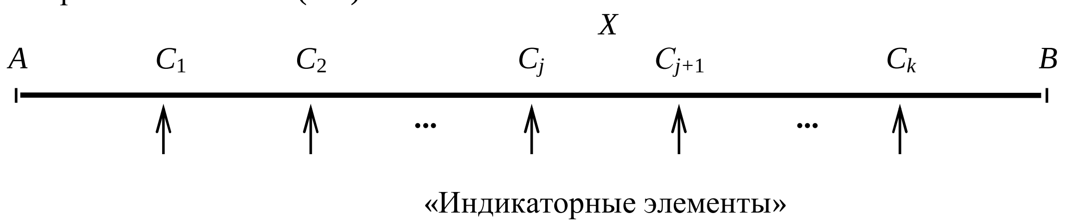

Рисунок 1. «Индикаторная» модель измерения

В результате приложение j-го ИЭ (j=1, 2, ..., k) на l-м шаге алгоритма (l = 1, 2, ..., n) к некоторой точке $C_j \in AB$ осуществляется "сравнение" отрезка AX и отрезка AC_j, т.е. определяется соотношение «меньше» (<) или «больше или равно» (≥), в котором находятся сравниваемые отрезки AX и AC_j . Заметим, что указанное свойство ИЭ и является его основным определением.

Будем считать, что "выходной сигнал" или "показание" j-го ИЭ в точке C_j принимает значение 0, если имеет место соотношение $AX < AC_j$, и значение 1, если $AX \geq AC_{j+1}$. Будем также считать, что j-й ИЭ находится "справа" от точки X, если в результате его приложения к некоторой точке C_j его «показание» приняло значение 0, и "слева" – в противном случае.

Заметим, что задача измерения отрезка AX в «индикаторной» модели измерения (Рис.1) сводится к сужению интервала неопределенности относительно точки X. Процесс измерения состоит в том, что на первом шаге измерения индикаторные элементы прикладываются к некоторым точкам исходного интервала неопределенности AB и при этом на основании показаний ИЭ интервал неопределенности сужается до некоторого нового отрезка $A_1B_1 \subset AB$; на всех последующих шагах индикаторные элементы прикладываются к точкам интервала неопределенности A_1B_1, выделенного на предыдущем шаге.

3. Понятие оптимального алгоритма измерения

На процесс измерения могут накладываться некоторые условия или ограничения S.

Система формальных правил, для каждого отрезка AX определяющая на каждом из n шагов измерения совокупность точек приложения k индикаторных элементов на основании их показаний на предыдущих шагах при ограничениях на измерение S, называется *(n, k, S) - алгоритмом измерения.*

Таким образом, согласно построенной «индикаторной» модели измерения (Рис.1) процесс измерения состоит в последовательном прикладывании k ИЭ к точкам отрезка AB и сужению интервала неопределенности относительно точки X. Построенная модель измерения сводит задачу измерения отрезка AX *к* задаче детерминированного одномерного поиска координаты точки X на отрезке AB с помощью k ИЭ за n шагов. Такой методический прием позволяет эффективно использовать идеи и принципы теории одномерного поиска [4] для строгого определения понятия *«оптимального»* (n, k, S)- алгоритма измерения.

В результате действия (n,k,S)-алгоритма на отрезке AB при заданном $X \in AB$ на последнем шаге алгоритма выделяется некоторый интервал неопределенности, содержащий точку X. Длина этого интервала Δ и определяет «точность» измерения отрезка AX. Рассматривая действие алгоритма для всевозможных точек X отрезка AB и выделяя все интервалы неопределенности, содержащие соответствующие точки X, получаем множество интервалов неопределенности:

$$\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_N, \quad (1)$$

образующих некоторое разбиение отрезка *AB* на *N* отрезков, причем

$$AB = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_j + \ldots + \Delta_N. \quad (2)$$

Ясно, что разбиение (1), удовлетворяющее условию (2), является некоторой «интегральной» характеристикой «качества» (n,k,S)-алгоритма, действующего на отрезке *AB*, и оно может быть использовано для введения строгого определения понятия «оптимального» (n,k,S)-алгоритма.

Рассмотрим отношение $T_i = \frac{AB}{\Delta_i}$ (i=1, 2, 3, …, *N*), которое будем называть *«точностью определения»* точки *X*, принадлежащей интервалу Δ_i. Выберем из разбиения (1) наибольший интервал неопределенности Δ_{max}. Отрезку Δ_{max} соответствует наименьшая (т.е. "наихудшая") точность определения точки *X*

$$T_{\min} = \frac{AB}{\Delta_{\max}}, \quad (3)$$

с помощью которой мы и будем оценивать эффективность действия (n,k,S)- алгоритма на отрезке *AB*. Ясно, что каждое распределение (1) характеризуется единственным значением величины (3). Назовем такое значение «точности» T_i, определяемое выражением (3), (*n*, *k*)-*точностью* (n,k,S)-алгоритма. Выбирая понятие (*n*,*k*)-точности в качестве критерия «эффективности» или «оптимальности», мы можем сравнивать различные (n,k,S)-алгоритмы по их (*n*,*k*)-точности, соответствующей заданным значениям *n*, *k* и *S*.

Проведенные рассуждения дают нам право ввести следующее строгое определение понятия оптимального (n,k,S)- алгоритма.

Определение 1. Оптимальным (n,k,S)-алгоритмом называется такой (n,k,S)-алгоритм, который при прочих равных условиях, то есть, при заданных значениях *n*, *k* и *S*, обеспечивает наибольшее значение (*n*, *k*)-точности, задаваемой (3).

Заметим, что в этом определении по существу использован так называемый «принцип минимакса» [4], широко используемый в современной теории оптимальных систем. Согласно этому принципу мы называем «оптимальной» такую стратегию действий, которая обеспечивает максимальное значение критерия эффективности для наихудшего случая.

Рассмотрим еще раз разбиение (1), которое является результатом действия (n,k,S)- алгоритма на отрезке *AB*, и оценим это разбиение с точки зрения введенного нами понятия (*n*, *k*)-точности. Нетрудно показать, что наибольшее значение (*n*,*k*)-точности при прочих равных условиях соответствует «равномерное» разбиение отрезка, когда все интервалы неопределенности (1) равны между собой, то есть,

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_N = \Delta_{\max} = \frac{AB}{N}. \quad (4)$$

Подставляя вместо Δ_{max} его значение, задаваемое (3), получаем следующее выражение для (*n*, *k*)-точности алгоритма:

$$T = T_{\min} = N. \quad (5)$$

Это означает, что «оптимальные» (n,k,S)-алгоритмы всегда обеспечивают «равномерное» разбиение отрезка *AB*; при этом «оптимальным» является такой (n,k,S)-алгоритм, который обеспечивает разбиение отрезка *AB* на наибольшее количество равных интервалов *N*. Ясно, что при заданном *S* критерий эффективности (n,k,S)-алгоритма, то есть, число «уровней квантования» *N*, является некоторой функцией от числа шагов алгоритма *n* и числа индикаторных элементов *k*, участвующих в измерении, т.е.

$$N = F(n,k). \tag{6}$$

В дальнейшем функцию $F(n,k)$ будем также называть «*функцией эффективности*» алгоритма измерения.

4. Классические алгоритмы измерения

В современной измерительной технике (в частности, в технике аналого-цифрового преобразования) широкое распространение получили следующие алгоритмы измерения:

4.1. **Алгоритм последовательного счета или просто алгоритм счета**. Этот алгоритм использует один ИЭ (k=1) и реализуется за n шагов; при этом отрезок AB с помощью одного ИЭ за n шагов разбивается на n+1 равных частей, т.е. в данном случае (n,1)-точность алгоритма определяется следующей «функцией эффективности»:

$$N = F(n,1) = n+1. \tag{7}$$

Важно подчеркнуть, что этот алгоритм измерения имеет глубокие математические корни. Именно этот алгоритм лежит в основе «метода исчерпывания» Евдокса и «Евлидового определения» натурального числа:

$$N = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{N}, \tag{8}$$

которое задает не только натуральные числа, но и всю проблематику их теории, изложенной в «Началах» Евклида.

4.2. **Алгоритм поразрядного кодирования или просто «двоичный» алгоритм** также использует один ИЭ (k=1) и реализуется за n шагов; при этом отрезок AB с помощью одного ИЭ разбивается на 2^n равных частей, т.е. в данном случае (n, 1)-точность алгоритма определяется следующей «функцией эффективности»:

$$N = F(n,1) = 2^n. \tag{9}$$

Этот алгоритм «порождает» двоичное представление числа («двоичную систему»), лежащую в основе современной информационной технологии:

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i, \tag{10}$$

где $a_i \in \{0,1\}$ - двоичная цифра, а 2^i -вес i -го разряда.

То есть, эти простейшие алгоритмы измерения порождают как *теорию чисел*, так и *современные компьютеры*.

4.3. **Алгоритм считывания**. Этот алгоритм реализуется за один шаг (n=1) и использует k ИЭ; при этом с помощью k ИЭ отрезок AB разбивается на k+1 равных частей, т.е. в данном случае (1, k)-точность алгоритма определяется следующей «функцией эффективности»:

$$N = F(1,n) = k+1. \tag{11}$$

В качестве примера «классических алгоритмов измерения» рассмотрим действие «алгоритм счета» (Рис.2), «двоичного» алгоритма (Рис.3) и «алгоритма считывания» (Рис.4).

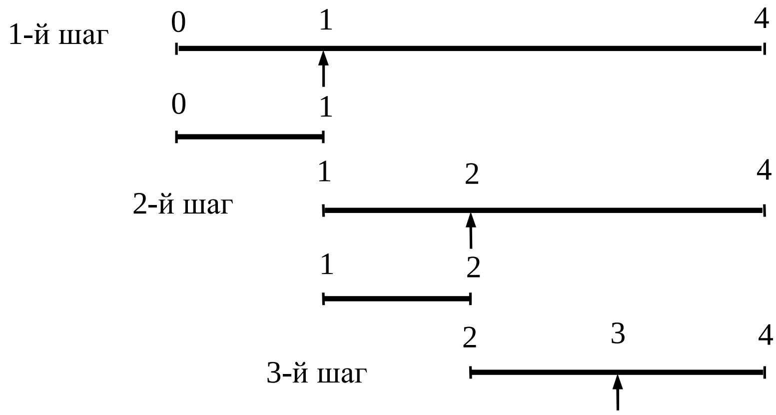

Рисунок 2. 3-шаговый «алгоритм счета»

«Алгоритм счета», демонстрируемый на Рис.2, реализуется за 3 шага и использует только один ИЭ. Он разбивает отрезок [0,4] на 4 равные части.

Первый шаг состоит в приложении ИЭ к точке 1. При этом в зависимости от показания ИЭ могут возникнуть две ситуации: отрезок [0,1] и отрезок [1,4].

Второй шаг.

(а) Если «показание» ИЭ в точке 1 равно 0 (ИЭ показал влево), это означает, что измеряемая точка X находится на отрезке [0,1]. В этой ситуации, процесс измерения заканчивается, так как координата точки X ($X \in [0,1]$) определена с «точностью», определяемой единицей измерения.

(б) Если «показание» ИЭ в точке 1 равно 1 (ИЭ показал вправо), это означает, что измеряемая точка X находится на отрезке [1,4]. В этой ситуации процесс измерения продолжается и ИЭ на следующем шаге прикладывается к точке 2, в результате чего мы получаем две новые ситуации: отрезок [1,2] и отрезок [2,4] .

Третий шаг.

(в) Если «показание» ИЭ в точке 2 равно 0 (ИЭ показал влево), это означает, что измеряемая точка X находится на отрезке [1,2]. В этой ситуации процесс измерения заканчивается, так как координата точки X ($X \in [1,2]$) определена с «точностью», соответствующей единице измерения.

(г) Если «показание» ИЭ в точке 2 равно 1 (ИЭ показал направо), это означает, что измеряемая точка X находится на отрезке [2,4]. В этой ситуации процесс измерения продолжается и ИЭ на следующем шаге прикладывается к точке 3. В результате мы получим две новые ситуации: отрезок [2,3] и отрезок [3,4] в зависимости от «показания» ИЭ на последнем шаге.

На Рис. 4 показано действие 3-шагового «двоичного алгоритма» на отрезке [0,8]. Суть алгоритма ясна из Рис. 4 и состоит в приложении ИЭ к середине интервала неопределенности относительно точки X, полученного на предыдущем шаге на основании «показания» ИЭ.

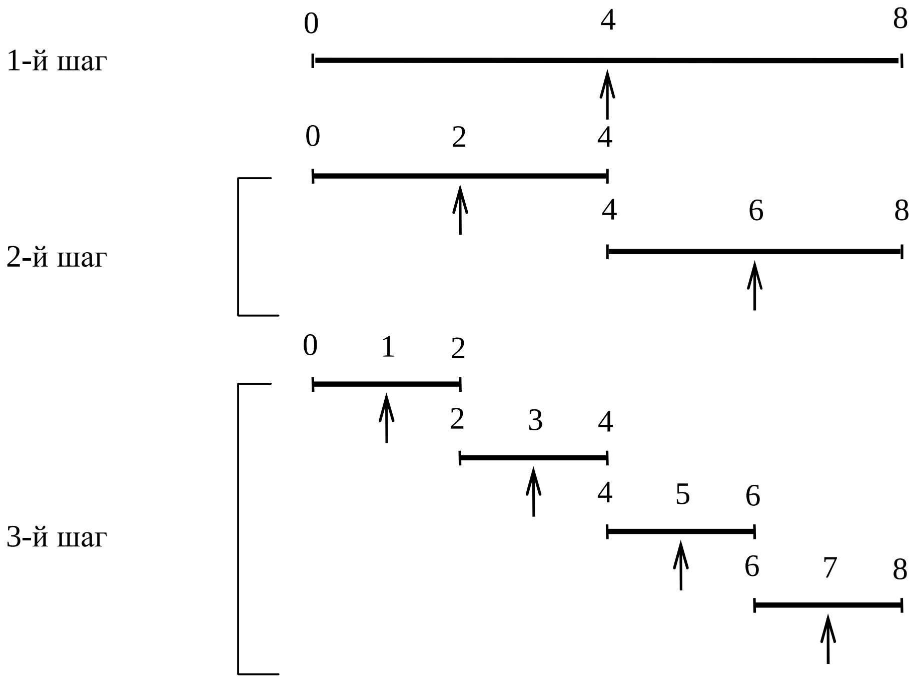

Рисунок 3. «Двоичный» алгоритм измерения

Наконец, на Рис. 4 представлен пример еще одного алгоритма измерения, «алгоритма считывания», широко используемого на практике. Этот «алгоритм» лежит в основе традиционной «измерительной линейки».

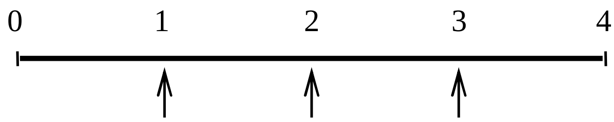

Рисунок 4. Алгоритм считывания

«Алгоритм считывания», приведенный на Рис. 4, реализуется за один шаг (n=1) и имеет в своем распоряжении 3 ИЭ, которые прикладываются к точкам 1, 2, 3 отрезка [0,4], как показано на Рис. 4.

5. Об ограничениях *S*

В определении (n,k,S)– алгоритма присутствует понятие «ограничения S», которые накладываются на алгоритм измерения. Ясно, что всякое «ограничение» снижает эффективность алгоритма, но, с другой стороны, каждое «ограничение», как будет показано ниже, приводит к весьма необычным алгоритмам измерения, которые могут представлять теоретический или практический интерес.

Начнем с простейших «ограничений», которые можно обнаружить из сравнительного анализа классических алгоритмов измерения, в частности, «двоичного алгоритма» и «алгоритма счета». Сравним два 3-шаговые (n,k,S)–алгоритма, представленные на Рис. 2 и 3. Оба алгоритма реализуются за одно и то же число шагов (n=3) и имеют в своем распоряжении по одному ИЭ (k=1). В чем же различие между этими (3,1,S)-алгоритмами? Как показывает сравнительный анализ, различие между ними состоит в характере «движения» ИЭ на отрезке. Действительно, в примере на Рис.3 допускается «произвольное» движение ИЭ на отрезке [0,8], то есть, после любого шага на следующем шаге ИЭ может быть приложен, как справа, так и слева по отношению к точке его приложения на предыдущем шаге. Уместно для указанного выше «ограничения» использовать обозначение S=0. И тогда мы можем рассмотреть так называемые (n. k, 0)-алгоритмы, то есть, алгоритмы измерения, в которых «движение» ИЭ на отрезке подчиняется ограничению S=0.

Рассмотрим теперь алгоритм счета на Рис. 2. В этом примере «движение» ИЭ подчиняется строгому ограничению: ИЭ в процессе реализации алгоритма движется на отрезке только в одном направлении – от точки A к точке B. При этом ИЭ принимает участие в измерении до тех пор, пока он находится «слева» от точки X: как только ИЭ «перепрыгивает» через точку X, он выбывает из дальнейшего участия в измерении. Обозначим такое ограничение через S=1. И тогда мы вправе также рассмотреть так называемые (n,k,1)-алгоритмы, то есть, алгоритмы измерения, в которых «движение» ИЭ на отрезке подчиняется ограничению S=1.

Заметим, что ограничения S=0 и S=1 не являются единственными возможными «ограничениями». Важно подчеркнуть, что каждое «ограничение» приводит к разработке того или иного класса «оптимальных» алгоритмов измерения, представляющих теоретический или практический интерес; поэтому поиск разумных «ограничений», накладываемых на алгоритм, является важной задачей алгоритмической теории измерения.

6. Оптимальные (*n*, *k*, 0)-алгоритмы

6.1. *Метод рекуррентных соотношений*

Как упоминалось выше, под (n,k,0)-алгоритмом мы будем понимать n-шаговый алгоритм измерения, который имеет в своем распоряжении k ИЭ, движение которых на отрезке AB подчиняется ограничению S=0. Напомним, что ограничение S=0 по существу означает отсутствие каких-либо ограничений на «движение» ИЭ, то есть, каждый ИЭ на любом шаге алгоритма может быть приложен к любой точке отрезка AB.

Нас будет интересовать задача нахождения или синтеза «оптимального» n-шагового алгоритма, то есть, алгоритма, который при заданных n, k и заданном «ограничении» S=0 разбивает отрезок AB на наибольшее число равных интервалов.

Для решения задач синтеза оптимальных (n,k,S)-алгоритмов воспользуемся так называемым «методом рекуррентных соотношений» [5], широко применяемым для решения комбинаторных задач. Суть метода состоит в том, что решение комбинаторной задачи, состоящей из n шагов, сводится к решению комбинаторной задачи для n-1 шагов; при этом находится «рекуррентное соотношение», связывающее оба решения. И так продолжается до тех пор, пока мы не придем к некоторой «простой» комбинаторной задаче, решение которой не вызывает затруднений.

6.2. *Синтез оптимального (n, k, 0)-алгоритма*

Применительно к задаче синтеза оптимального $(n,k,0)$-алгоритма суть метода рекуррентных соотношений состоит в следующем. Сделаем так называемое «индуктивное предположение». Предположим, что для любых n и k существует оптимальный $(n,k,0)$-алгоритм, который реализует на отрезке AB (n,k)-точность, равную $F(n,k)$, то есть, «функция эффективности» алгоритма равна $F(n,k)$; другими словами, суть нашего «индуктивного предположения» состоит в том, что оптимальный $(n,k,0)$-алгоритм разбивает отрезок AB на $F(n,k)$ равных интервалов единичной длины Δ=1, то есть,

$$AB = F(n,k). \tag{12}$$

Пусть теперь первый шаг оптимального $(n,k,0)$-алгоритма на отрезке AB состоит в приложении k «индикаторных элементов» к точкам отрезка AB, как показано на Рис.5.

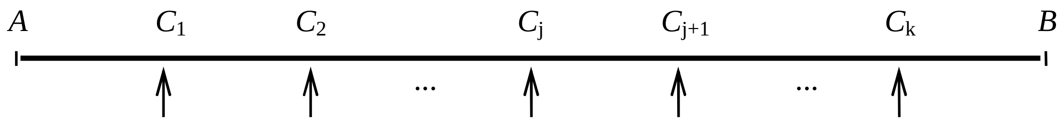

Рисунок 5. Первый шаг оптимального $(n,k,0)$-алгоритма

После первого шага на основании «показаний» k ИЭ может возникнуть k+1 ситуаций:

$$(1)\ X\in AC_1;\ (2)\ X\in C_1C_2;\ \ldots;\ (j+1)\ X\in C_jC_{j+1};\ \ldots\ ;\ (k+1)\ X\in C_kB, \tag{13}$$

причем

$$AC_1 + C_1C_2 + \ \ldots + C_jC_{j+1} + \ \ldots + C_kB = AB. \tag{14}$$

Рассмотрим ситуацию $X\in C_jC_{j+1}$. В этой ситуации у нас осталось (n-1) шагов, поскольку один шаг мы уже совершили, и k ИЭ, которые согласно ограничению S=0 могут быть приложены к любым точкам нового интервала неопределенности C_jC_{j+1}, содержащего точку X. Но тогда возникшая после 1-го шага ситуация ничем не отличается от исходной ситуации. Изменилось только число шагов, которые имеются в нашем распоряжении для реализации алгоритма измерения, действующего на новом отрезке C_jC_{j+1}. И тогда в этой ситуации для поиска координаты точки X мы можем применить к новому интервалу неопределенности C_jC_{j+1} оптимальный $(n-1,k,0)$-алгоритм, который, согласно нашему «индуктивному предположению» (10), разбивает отрезок C_jC_{j+1} на $F(n-1,k)$ равных частей единичной длины Δ=1, то есть,

$$C_jC_{j+1} = F(n-1,\ k). \tag{15}$$

Но проведенные рассуждения справедливы для любой из (k+1) ситуаций (13), то есть, для любого из отрезков (13) имеет место соотношение (15).

Используя теперь соотношение (15), связывающие исходный отрезок AB с отрезками (13), а также выражения (12) и (15), мы получим следующую рекуррентную формулу для (n,k)-точности оптимального $(n,k,0)$-алгоритма:

$$F(n,k)=(k+1)F(n-1,k) \tag{16}$$

А теперь попытаемся решить «рекуррентное соотношение» (16), то есть, получить представление для «функции эффективности» $F(n,k)$ в «явном виде». Для этого применим для функции $F(n-1,k)$ в выражении (16) ту же рекуррентную формулу (16), то есть, представим выражение (16) в виде:

$$F(n,k)=(k+1)(k+1)F(n-2,k) \tag{17}$$

Продолжая этот процесс, то есть, раскладывая в (17) все функции $F(n-2,k),F(n-3,k),F(2,k)$ по рекуррентной формуле (16), мы получим следующее выражение для (17):

$$F(n,k)=(k+1)^{n-1}F(1,k) \tag{18}$$

В выражении (18) у нас имеется член F(1,k), значение которого нам неизвестно. Но что такое $F(1,k)$? Согласно нашим определениям – это (1,k)-точность оптимального (1, k, 0)-алгоритма, то есть, алгоритма, который реализуется за 1 шаг и имеет в своем распоряжении k ИЭ. Ясно, что в этом случае «оптимальная стратегия» состоит в том, что с помощью k ИЭ исходный интервал неопределенности разделяется на (k+1) равных частей; (1,k)-точность такого алгоритма равна

$$F(1, k) = k + 1. \qquad (19)$$

Подставляя выражение (19) в (18), получим выражение для (n,k)-точности оптимального (n, k, 0)-алгоритма в явном виде:

$$F(n,k) = (k+1)^n. \qquad (20)$$

Легко уяснить, что стратегия оптимального $(n,k,0)$-алгоритма на каждом шаге очень проста: необходимо на каждом шаге разбивать интервал неопределенности с помощью k ИЭ на (k+1) равных частей.

6.3. *Частные случаи оптимального (n,k,0)-алгоритма*

Рассмотрим частные крайние случаи оптимального $(n,k,0)$-алгоритма. Пусть n=1. Тогда выражение (20) сводится к (19), а возникающий при этом оптимальный $(1,k,0)$-алгоритм есть ни что иное, как рассмотренный нами выше "алгоритм считывания» (Рис.4).

Для случая k=1 формула (20) сводится к выражению (9), которое задает значение (n,1)-точности «двоичного» алгоритма, т.е. «двоичный» алгоритм (Рис.3) является крайним частным случаем оптимального $(n,k,0)$-алгоритма.

6.4. *Оптимальные (n,k,0)-алгоритмы и позиционные системы счисления*

Но мы уже знаем, что «двоичный» алгоритм измерения (Рис.2) «порождает» двоичную систему счисления (10). Но тогда ясно, что оптимальный $(n,k,0)$-алгоритм в общем случае также «порождает» некоторую позиционную систему счисления с основанием R=k+1, то есть, представление натурального числа в виде:

$$A = a_{n-1} R^{n-1} + a_{n-2} R^{n-2} + ... + a_i R^i + ... + a_1 R^1 + a_0 R^0, \qquad (21)$$

где $a_i \in \{0, 1, 2, ..., k\}$ цифра i-го разряда.

В частности, для случая k=9 формула (21) сводится к классической десятичной системе счисления:

$$A = a_{n-1}\, 10^{n-1} + a_{n-2}\, 10^{n-2} + ... + a_i\, 10^i + ... + a_1\, 10^1 + a_0\, 10^0,$$

которая изучается в средней школе.

Для случая k=59 формула (21) сводится к Вавилонской 60-ричной системе счисления. Из этого рассуждения вытекает, что «оптимальные» $(n,k,0)$-алгоритмы «порождают» все широко известные позиционные системы счисления (вавилонскую 60-ричную, десятичную, двоичную и др.).

Эти примеры полезны тем, что они указывают на тесную связь *алгоритмической теории измерения* [2] с *теорией позиционных систем счисления*, которая начала развиваться в математике еще с вавилонского периода.

Литература

1. Вейль Г. О философии математики. М.-Л., 1934. (Репринт М: КомКнига, 2005)
2. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. М.: Советское Радио, 1977.
3. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. М.: Знание. Серия «Математика и кибернетика», вып.6, 1979.
4. Уайлд Дж. Методы поиска экстремума. М.: Наука, 1967.
5. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1967.