А.П. Стахов

Конструктивная (алгоритмическая) теория измерения, системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии

Алгебру и Геометрию постигла одна и та же участь. За быстрыми успехами в начале следовали весьма медленные и оставили науку на такой ступени, где она еще далека от совершенства. Это произошло, вероятно, от того, что Математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою.

Николай Лобачевский

Часть 4. Биномиальные алгоритмы измерения

*Если рассмотреть историю математики с момента ее зарождения, то, согласно А.Н. Колмогорову, ее развитие стимулировалось практическими потребностями в **счете**, что привело к открытию позиционного принципа представления чисел (Вавилонская 60-ричная система счисления) и «созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел» (А.Н. Колмогоров), и в **измерении,** что вызвало «развитие начатков геометрии» (А.Н. Колмогоров) и привело к открытию «несоизмеримых отрезков». Однако, согласно **«гипотезе Прокла»**, создание древнегреческой математики, которая лежит в основе современной математики, осуществлялось под мощным влиянием **«идеи гармонии»** - главной идеи древнегреческой науки. Наиболее ярко это влияние отразилось в «Началах» Евклида, главной целью которых стало создание завершенной геометрической теории **Платоновых тел**, выражавших в древнегреческой науке «гармонию Мироздания». В настоящей статье обсуждаются три новые математические теории, которые возникли в современной науке в развитие трех фундаментальных проблем, лежащих в основании математики - счета, измерения и гармонии: **алгоритмическая теория измерения**, **системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии**. В основе алгоритмической теории измерения (АТИ) лежит абстракция потенциальной бесконечности, то есть, она является **конструктивной математической теорией измерения** (без аксиомы Кантора). Предметом исследований в АТИ являются оптимальные, то есть, наилучшие в определенном смысле алгоритмы измерения. Основным математическим результатом АТИ является синтез новых, неизвестных ранее алгоритмов измерения, которые порождают новые, неизвестные ранее позиционные системы счисления. Наиболее неожиданными результатами АТИ являются так называемые **биномиальные алгоритмы измерения**, основанные на «арифметическом квадрате» (треугольнике Паскаля), и **фибоначчиевые алгоритмы измерения,** которые привели к открытию новых числовых последовательностей, названных **p-числами Фибоначчи**. Фибоначчиевы алгоритмы измерения лежат в основе **p-кодов Фибоначчи** – новых способов позиционного представления натуральных чисел, которые являются обобщением классической двоичной системы. Эти позиционные представления были положены в основу нового направления в компьютерной науке – **компьютеров Фибоначчи** (65 патентов США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канады и др. стран). **Системы счисления с иррациональными основаниями (коды золотой p-пропорции)** являются новыми способами позиционного представления действительных чисел. Они переворачивают наши традиционные представления о системах счисления и могут быть положены в основу **«золотой» теории чисел.** Наконец, **«математика гармонии»,** включающая в себя АТИ и коды золотой пропорции, является новым междисциплинарным направлением современной науки, которое может быть положено в основу новой математики, лишенной противоречий.*

Статья состоит из 8 частей:

1. *Роль измерения в развитии науки*
2. *Математическая теория измерения и проблема бесконечности*
3. *Математическая модель измерения. Оптимальные (n,k,0)-алгоритмы и классические позиционные системы счисления*
4. *Биномиальные алгоритмы измерения как источник биномиальных систем счисления*
5. *Задача Баше-Менделеева, принцип асимметрии измерения, фибоначчиевые алгоритмы измерения и p-коды Фибоначчи*
6. *Системы счисления с иррациональными основаниями как основа ««золотой» теории чисел*
7. *Математика гармонии: наиболее яркие страницы*
8. *Основные математические результаты, приложения и перспективы развития «математики гармонии»*

1. Синтез оптимального (*n*,*k*,1)-алгоритма

А теперь попытаемся синтезировать оптимальный $(n,k,1)$-алгоритм [1]. Напомним, что ограничение S=1 означает, что «индикаторные элементы» движутся вдоль отрезка *AB* только в одном направлении - от точки *A* к точке *B*. Это означает, что если ИЭ на некотором шаге оказывается справа от искомой точки *X*, то этот ИЭ «выбывает из игры», то есть, не может быть использован в дальнейшем в процессе измерения. Ярким примером ограничения S=1 является рассмотренный выше «алгоритм счета», лежащий в основе «Евклидового определения» натурального числа.

Проведем те же рассуждения, что и при синтезе оптимального $(n,k,0)$-алгоритма. Предположим, что для любых n и k существует оптимальный $(n,k,1)$-алгоритм, который реализует на отрезке *AB* (n,k)-точность, равную $F(n,k)$; другими словами, оптимальный $(n,k,1)$-алгоритм разбивает отрезок *AB* на $F(n,k)$ равных интервалов единичной длины Δ=1, то есть,

$$AB = F(n, k). \qquad (1)$$

Пусть первый шаг оптимального $(n,k,1)$-алгоритма на отрезке *AB* состоит в приложении k «индикаторных элементов» к точкам отрезка *AB*, как показано на Рис.1.

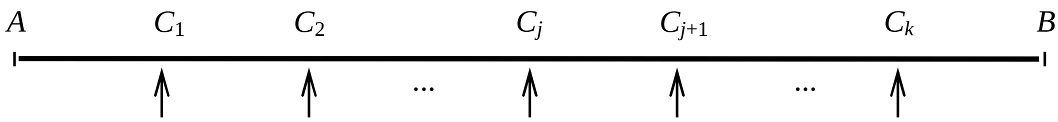

Рисунок 1. Первый шаг оптимального (n, k, 1)-алгоритма

После первого шага на основании «показаний» k ИЭ может возникнуть k+1 ситуаций:

$$(1)\ X\in AC_1;\ (2)\ X\in C_1C_2;\ \ldots;\ (j+1)\ X\in C_jC_{j+1};\ \ldots;\ (k+1)\ X\in C_kB, \qquad (2)$$

причем

$$AC_1 + C_1C_2 + \ \ldots + C_jC_{j+1} + \ \ldots + C_kB = AB. \qquad (3)$$

А теперь проанализируем возникшие после первого шага ситуации (2).

Рассмотрим первую ситуацию $X\in AC_1$. В этой ситуации все ИЭ оказались справа от точки *X*. А это означает, что согласно ограничению S=1 ни один из ИЭ не может быть в дальнейшем приложен к точкам интервала AC_1, то есть, измерение фактически заканчивается после первого шага, так как мы «потеряли» все ИЭ. Но согласно нашему «индуктивному предположению» оптимальный $(n,k,1)$-алгоритм «разбивает отрезок *AB* на $F(n,k)$ равных частей единичной длины Δ=1. Тогда отсюда вытекает, что первый интервал неопределенности AC_1 и должен быть отрезком единичной длины, то есть,

$$AC_1 = 1. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь вторую ситуацию $X \in C_1C_2$. В этой ситуации в нашем распоряжении осталось (n-1) шагов и 1 ИЭ, который находится слева от искомой точки X (все остальные ИЭ находятся справа от точки X и согласно ограничению S=1 «выбывают из игры»). Тогда мы можем применить к отрезку C_1C_2 оптимальный (n-1,1,1)-алгоритм, который, согласно «индуктивному предположению» (1), разбивает отрезок C_1C_2 на $F(n-1,1)$ равных частей единичной длины $\Delta=1$, то есть,

$$C_1C_2 = F(n-1, 1). \tag{5}$$

Рассмотрим теперь ситуацию $X \in C_jC_{j+1}$. В этой ситуации в нашем распоряжении осталось (n-1) шагов и j ИЭ, которые находится слева от искомой точки X (все остальные ИЭ находятся справа от точки X и согласно ограничению S=1 «выбывают из игры»). Тогда мы можем применить к отрезку C_jC_{j+1} оптимальный (n-1,j,1)-алгоритм, который, согласно «индуктивному предположению» (1), разобьет отрезок C_jC_{j+1} на $F(n-1,j)$ равных частей единичной длины, то есть,

$$C_jC_{j+1} = F(n-1, j). \tag{6}$$

Наконец, в последней ситуации $X \in C_kB$ все k ИЭ оказываются слева от точки X; это означает, что мы можем применить к отрезку C_kB оптимальный (n-1, k,1)-алгоритм, который, согласно «индуктивному предположению» (1), разобьет отрезок C_kB на $F(n-1, k)$ равных частей единичной длины, то есть,

$$C_kB = F(n-1,k). \tag{7}$$

Учитывая соотношение (3), а также выражения (4), (5), (6) и (7), мы можем записать следующее рекуррентное соотношение для (n,k)-точности оптимального (n, k, 1)-алгоритма:

$$F(n,k) = 1 + F(n-1,1) + \ldots + F(n-1,j) + \ldots + F(n-1,k-1) + F(n-1,k) \tag{8}$$

А теперь рассмотрим сумму

$$1 + F(n-1,1) + \ldots + F(n-1,j) + \ldots + F(n-1,k), \tag{9}$$

взятую из выражении (8). Согласно рекуррентной формуле (8) сумма (9) равна $F(n, k-1)$, то есть,

$$F(n,k-1) = 1 + F(n-1,1) + \ldots + F(n-1,j) + \ldots + F(n-1,k) \tag{10}$$

Используя (10), мы можем записать рекуррентное соотношение (8), которое задает «функцию эффективности» оптимального (n,k,1)-алгоритма в более компактной форме:

$$F(n,k) = F(n,k-1) + F(n-1,k) \tag{11}$$

А теперь попытаемся построить таблицу чисел $F(n,k)$, используя рекуррентную формулу (11). Для этого выясним, чему равны крайние значения функции $F(n,k)$, соответствующие значениям n=0 и k=0, то есть, значения $F(0,k)$ и $F(n,0)$. Напомним, что $F(0,k)$ есть (0,k)-точность оптимального (0,k,1)-алгоритма, а $F(n,0)$ есть (n,0)-точность оптимального (n,0,1)-алгоритма. Но согласно нашим определениям, (0, k,1)-алгоритм есть (n, k, S)-алгоритм, в котором число шагов равно нулю, то есть, n=0, а (n, 0, 1)-алгоритм есть (n, k, S)-алгоритм, в котором число ИЭ равно нулю, то есть, k=0. Но из «физического» смысла решаемой задачи, (n, k, S)-алгоритм, в котором либо n=0, либо k=0 не может сузить исходный интервал неопределенности, и поэтому для такого (n, k, S)-алгоритма (n, k)-точность или «функция эффективности» всегда тождественно равна 1, то есть,

$$F(0, k) = F(n, 0) = 1. \tag{12}$$

Используя рекуррентное соотношение (11) и начальные условия (12), мы можем построить следующую таблицу для численных значений функции $F(n,k)$ (см. Табл. 1).

Таблица 1. Арифметический квадрат

	0	1	2	3	4	5	...	*n*
0	1	1	1	1	1	1	...	1
1	1	2	3	4	5	6	...	$F(n, 1)$
2	1	3	6	10	15	21	...	$F(n, 2)$
3	1	4	10	**20**	35	56	...	$F(n, 3)$
4	1	5	15	35	70	126	...	$F(n, 4)$
5	1	6	21	56	126	252	...	$F(n, 5)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
k	1	$F(1, k)$	$F(2, k)$	$F(3, k)$	$F(4, k)$	$F(5, k)$	...	$F(n, k)$

Сравнивая эту таблицу с таблицей биномиальных коэффициентов, известной под названием «арифметический квадрат» или «прямоугольник Тарталья», мы приходим к неожиданному заключению, что «функция эфективности» $F(n,k)$ выражается с помощью формулы для биномиальных коэффициентов, то есть,

$$F(n,k) = C_{n+k}^{n} = C_{n+k}^{k}. \quad (13)$$

Действие оптимального $(n,k,1)$-алгоритма может быть продемонстрировано с помощью «арифметического квадрата». Действительно, для заданных n и k значение функции $F(n,k)$ находится на пересечении n-го столбца и k-й строки «арифметического квадрата». Координаты точек приложения k ИЭ на отрезке AB (точки C_1, C_2, ..., C_j , C_{j+1}, ... , C_k) относительно точки A (Рис.1) находятся в n-м столбце «арифметического квадрата», то есть:

$$AC_1 = 1, AC_2 = F(n,1), ..., AC_j = F(n,j) AC_{j+1} = F(n,j+1), ..., AC_k = F(n,k-1) \quad (14)$$

Если после первого шага алгоритма j ИЭ оказываются слева от точки X, а оставшиеся $(k-j)$ ИЭ – справа от точки X, то «интервал неопределенности» относительно точки X уменьшается до отрезка C_jC_{j+1} . Длина этого отрезка равна $F(n-1,j)$. Этот биномиальный коэффициент находится на пересечении $(n-1)$-го столбца и j-й строки «арифметического квадрата». Чтобы получить биномиальный коэффициент $F(n-1,j)$, мы должны сдвинуться от начального коэффициента $F(n, k)$ на один столбец влево (мы «потеряли» один шаг) и $(k - j)$ строк вверх (мы «потеряли» j ИЭ).

На *втором шаге* мы принимаем точку C_j как новое начало координат. При этом 2-й шаг состоит в приложении j ИЭ к некоторым точкам D_1, D_2, ... , D_j нового «интервала неопределенности» C_jC_{j+1}. Координаты точек D_1, D_2, ... , D_j относительно нового начала координат (точка C_j) находятся в $(n-1)$-м столбце «арифметического квадрата», то есть

$$C_jD_1 = 1, C_jD_2 = F(n-1,1), C_jD_3 = F(n-1,2), ..., C_jD_j = F(n-1, j-1) \quad (15)$$

Этот процесс заканчивается, когда будут «исчерпаны» либо все шаги алгоритма, либо все «индикаторные элементы».

2. Пример оптимального (*n*, *k*, 1)-алгоритма

В качестве примера рассмотрим действие оптимального (3, 3, 1)-алгоритма на отрезке [0, 20] (Рис. 2).

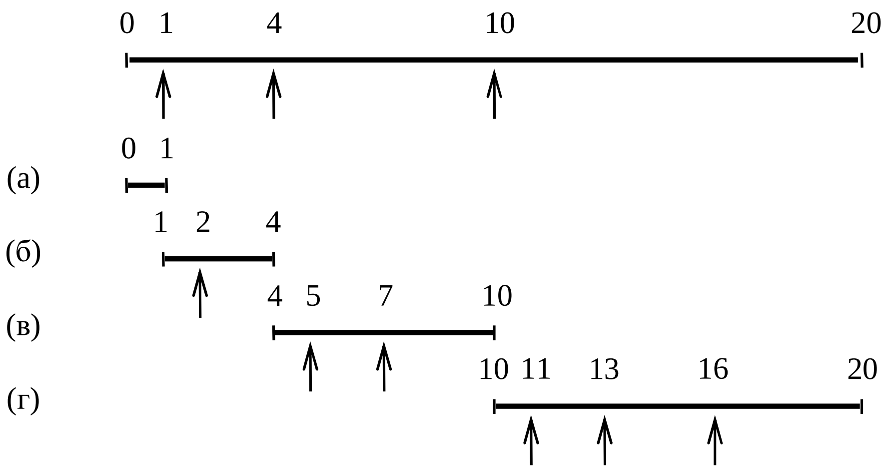

Рисунок 2. Оптимальный (3, 3, 1)-алгоритм

Оптимальный (3,3,1)-алгоритм реализуется за 3 шага и использует при этом 3 ИЭ. Заметим, что число $F(3,3)=20$, которое находится на пересечении 3-го столбца и 3-й строки «арифметического квадрата», равно длине исходного «интервала неопределенности» для данного алгоритма (выделено жирным шрифтом в Табл.1).

Первый шаг алгоритма на отрезке [0, 20] состоит в приложении трех ИЭ к точкам 1, 4, 10 (Рис.2). После первого шага на основании «показаний» ИЭ может возникнуть 4 ситуации (Рис. 2-а, -б, -в, -г).

Второй шаг.

Ситуация (а). Для этой ситуации процесс измерения заканчивается, так как все ИЭ находятся справа от точки X.

Ситуация (б). Для этой ситуации мы имеем только 1 ИЭ, который прикладывается к точке 2.

Ситуация (д). Для этой ситуации мы имеем 2 ИЭ, которые прикладываются к точкам 5 и 7.

Ситуация (г). Для этой ситуации мы имеем 3 ИЭ. В этом случае точка 10 есть новое начало координат и имеющиеся в нашем распоряжении 3 ИЭ прикладываются к точкам 1, 3, 6 относительно нового начала координат. Просуммировав эти числа с числом 10, мы можем получить координаты точек приложения ИЭ на следующем шаге: 11, 13, 16.

После второго шага может возникнуть следующие ситуации: [1,2], [2,4], [4,5], [5,7], [7,10], [10,11], [11,13], [13,16], [16,20]. Заметим, что для ситуаций [1,2], [4,5], [10,11] процесс измерения заканчивается на втором шаге.

Третий шаг.

Для ситуаций [2,4], [5,7] и [11,13] третий шаг состоит в приложении 1-го ИЕ к точкам 3, 6, 12 соответственно.

Для ситуаций [7,10] и [13,16] третий шаг состоит в приложении 2-х ИЭ к точкам 8, 9 или 14, 15 соответственно.

Для ситуации [16,20] третий шаг состоит в приложении 3-х ИЭ к точкам 17, 18, 19.

3. Крайние частные случаи оптимального (*n*, *k*, 1)-алгоритма

А теперь рассмотрим крайние частные случаи найденного нами оптимального $(n,k,1)$-алгоритма, то есть, когда $n=1$ или $k=1$. Для случая $n=1$ выражение (13) принимает вид

$$F(1,k)=C_{1+k}^{1}=C_{1+k}^{k}=k+1. \qquad (14)$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае (n=1) оптимальный (n,k,1)-алгоритм сводится к «алгоритму считывания».

Для случая k=1 выражение (13) принимает вид:

$$F(n,1)=C_{n+1}^{n}=C_{n+1}^{1}=n+1. \qquad (15)$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае (k=1) оптимальный (n,k,1)-алгоритм сводится к «алгоритму счета».

Какое значение может иметь оптимальный (n,k,1)-алгоритм для математики? Важно подчеркнуть, что оптимальный (n,k,1)-алгоритм представляет собой широкое обобщение «алгоритма счета», который исторически лежит в основе элементарной теории чисел, созданной пифагорейцами. И возможно, мы можем использовать алгоритм измерения, основанный на «арифметическом квадрате», для дальнейшего развития теории чисел? Но вполне возможно, что оптимальный (n,k,1)-алгоритм может иметь практическое значение для современных компьютеров. Этот алгоритм «генерирует» весьма необычную позиционную систему счисления, в которой весами разрядов являются биномиальные коэффициенты. И кто знает, может быть, кто-либо из наших читателей, увлекшись такой необычной системой счисления, построит новый («биномиальный») компьютер?

И в этом предположении нет ничего необычного, если учесть, что украинский исследователь Алексей Борисенко в течение нескольких десятилетний успешно развивает теорию биномиальных систем счисления и на эту тему он написал интересную книгу «Биномиальный счет. Теория и практика» [2].

Литература

1. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
2. Борисенко А. А. Биномиальный счет. Теория и практика. Сумы: Университетская книга, 2004