А.П. Стахов

Конструктивная (алгоритмическая) теория измерения, ее связь с «золотой» теорией чисел и основы математики, лишенной противоречий

Алгебру и Геометрию постигла одна и та же участь. За быстрыми успехами в начале следовали весьма медленные и оставили науку на такой ступени, где она еще далека от совершенства. Это произошло, вероятно, от того, что Математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою.

Николай Лобачевский

Часть 5. Задача Баше-Менделеева, принцип асимметрии измерения, фибоначчиевые алгоритмы измерения и *p*-коды Фибоначчи

Если рассмотреть историю математики с момента ее зарождения, то, согласно А.Н. Колмогорову, ее развитие стимулировалось практическими потребностями в ***счете****, что привело к открытию позиционного принципа представления чисел (Вавилонская 60-ричная система счисления) и «созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел» (А.Н. Колмогоров), и в* ***измерении,*** *что вызвало «развитие начатков геометрии» (А.Н. Колмогоров) и привело к открытию «несоизмеримых отрезков». Однако, согласно* ***«гипотезе Прокла»****, создание древнегреческой математики, которая лежит в основе современной математики, осуществлялось под мощным влиянием* ***«идеи гармонии»*** *- главной идеи древнегреческой науки. Наиболее ярко это влияние отразилось в «Началах» Евклида, главной целью которых стало создание завершенной геометрической теории* ***Платоновых тел****, выражавших в древнегреческой науке «гармонию Мироздания». В настоящей статье обсуждаются три новые математические теории, которые возникли в современной науке в развитие трех фундаментальных проблем, лежащих в основании математики - счета, измерения и гармонии:* ***алгоритмическая теория измерения****,* ***системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии****. В основе алгоритмической теории измерения (АТИ) лежит абстракция потенциальной бесконечности, то есть, она является* ***конструктивной математической теорией измерения*** *(без аксиомы Кантора). Предметом исследований в АТИ являются оптимальные, то есть, наилучшие в определенном смысле алгоритмы измерения. Основным математическим результатом АТИ является синтез новых, неизвестных ранее алгоритмов измерения, которые порождают новые, неизвестные ранее позиционные системы счисления. Наиболее неожиданными результатами АТИ являются так называемые* ***биномиальные алгоритмы измерения****, основанные на «арифметическом квадрате» (треугольнике Паскаля), и* ***фибоначчиевые алгоритмы измерения,*** *которые привели к открытию новых числовых последовательностей, названных* ***p-числами Фибоначчи****. Фибоначчиевы алгоритмы измерения лежат в основе* ***p-кодов Фибоначчи*** *– новых способов позиционного представления натуральных чисел, которые являются обобщением классической двоичной системы. Эти позиционные представления были положены в основу нового направления в компьютерной науке –* ***компьютеров Фибоначчи*** *(65 патентов США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канады и др. стран).* ***Системы счисления с иррациональными основаниями (коды золотой p-пропорции)*** *являются новыми способами позиционного представления действительных чисел. Они переворачивают наши традиционные представления о системах счисления и могут быть положены в основу* ***«золотой» теории чисел.*** *Наконец,* ***«математика гармонии»,*** *включающая в себя АТИ и коды золотой пропорции, является новым междисциплинарным направлением современной науки, которое может быть положено в основу новой математики, лишенной противоречий.*

Статья состоит из 8 частей:

1. *Роль измерения в развитии науки*
2. *Математическая теория измерения и проблема бесконечности*
3. *Математическая модель измерения. Оптимальные (n,k,0)-алгоритмы и классические позиционные системы счисления*
4. *Биномиальные алгоритмы измерения как источник биномиальных систем счисления*
5. *Задача Баше-Менделеева, принцип асимметрии измерения, фибоначчиевые алгоритмы измерения и р-коды Фибоначчи*
6. *Системы счисления с иррациональными основаниями как основа ««золотой» теории чисел*
7. *Математика гармонии: наиболее яркие страницы*
8. *Основные математические результаты, приложения и перспективы развития «математики гармонии»*

1. Задача Баше-Менделеева

Выше мы неоднократно упоминали о знаменитом итальянском математике 13-го столетия **Леонардо Пизано** (по прозвищу **Фибоначчи**). В 1202 г. он написал книгу “Liber abaci” («Книгу об абаке»). В этой книге Фибоначчи одним из первых ввел в европейскую математику арабскую десятичную систему счисления, предложил и решил ряд новых комбинаторных задач. Наиболее известной из них является «задача о размножении кроликов», при решении которой он и пришел к знаменитой числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …, прославившей его имя и ставшей объектом интенсивных математических исследований Фибоначчи Ассоциации.

Но оказывается, что Фибоначчи внес существенный вклад и в развитие математической теории измерения, впервые сформулировав так называемую *«задачу о выборе наилучшей системы гирь для взвешивания на рычажных весах»* или проще *«задачу о гирях»*. История задачи такова. Из сочинений Фибоначчи она перекочевала в сочинения еще одного знаменитого итальянского математика **Луки Пачоли.** Пачоли поместил ее в свою книгу “Summa de Arithmetica, Geomeytria, Proprtioni et Proportionalita”, опубликованную в 1494 г. Эта книга по праву считается математической энциклопедией эпохи Возрождения.

Затем «задача о гирях» появляется в «Сборнике приятных и занимательных задач» (1612 г.), написанном французским математиком **Баше де Мизириаком**. Из «Биографического словаря деятелей в области математики» **А.И. Бородина и А.С. Бугая** [1] мы узнаем о Баше де Мизириаке следующее:

*«**Баше де Мизириак Гаспар Клод** (9.10.1581 – 26.2.1638) – французский математик и поэт. Писал по-французски, по-итальянски и на латыни, знал греческий язык. В книге «Приятные и занимательные задачи» (Лион, 1612) Баше собрал старинные занимательные задачи. В задачах автор выделяет математически интересные моменты и старается обобщить частные вопросы. Баше дал решение неопределенных уравнений 1-й степени в целых числах, где был близок к непрерывным дробям, в 1621 г. издал «Арифметику» Диофанта на греческом и латинском языках, снабдив ее дополнениями и примечаниями».*

В русской историко-математической литературе «задача о гирях» известна также под названием *задачи Баше-Менделеева* . О Баше де Мизириаке мы уже рассказали. Но кто такой Менделеев? Неужели это знаменитый русский химик **Дмитрий Менделеев**, автор Периодического закона. Да, это именно так. Но почему русский химик вдруг заинтересовался «задачей о гирях»? Ответ на этот вопрос дает ознакомление с некоторыми малоизвестными фактами из жизни гениального ученого. Во время происходивших в 1890 г. студенческих волнений в Петербургском университете Менделеев, который в тот период работал профессором этого университета, выступил на защиту студентов и в качестве протеста подал прошение об отставке с должности профессора университета. Его прошение было удовлетворено и поэтому в 1892 г. Менделеев был назначен ученым хранителем Депо образцовых гирь и весов, которое по инициативе Менделеева в 1893 г. было преобразовано в Главную палату мер и весов России. Ее директором Менделеев оставался до конца жизни. Таким образом, заключительный этап жизни великого ученого (с 1892 г. и до его кончины в 1907 г.) был связан с развитием измерительного дела и именно в этот период со свойственной ему активностью Менделеев интересуется различными задачами, связанными с измерениями; одной из них и была «задача о гирях». Под его непосредственным влиянием было выполнены математические исследования по этой проблеме [21, 22]. Вклад Менделеева в развитие измерительного дела в России настолько велик, что «задача о гирях» была названа *задачей Баше-Менделеева*, а сам Менделеев по праву считается «отцом русской метрологии».

В чем же состоит суть этой задачи? Одним из наиболее древних измерительных устройств являются рычажные весы, которыми каждый из нас пользовался неоднократно. При взвешивании мы используем некоторую систему гирь; при этом «взвешивание» некоторого груза Q осуществляется путем его сравнения с гирями, имеющимися в нашем распоряжении. Процедура взвешивания, выполняемая в соответствии с некоторыми правилами, называется *алгоритмом взвешивания* или *алгоритмом измерения*. При этом возникает задача о выборе *«оптимальной» системы гирь*, которая по существу сводится к задаче о нахождении *«оптимального» алгоритма измерения*. Но это именно та задача, которую мы сформулировали в качестве центральной задачи конструктивной (алгоритмической) теории измерения. Таким образом, заслуга Фибоначчи состоит в том, что он сформулировал первую в истории математики «оптимизационную задачу» в теории измерения.

Известны два варианта решения «задачи о гирях» [4]. В первом случае взвешиваемый груз находится на левой чаше весов, а гири разрешается класть только на правую («свободную») чашу весов; во втором варианте гири разрешается класть на обе чаши весов.

Рассмотрим первый вариант задачи, приводящий к доказательству «оптимальности» двоичной системы гирь. Он формулируется следующим образом. Для упрощения задачи будем считать, что взвешиваемый груз принимает значения из множества неотрицательных целых чисел, то есть, 0, 1, 2, 3. … . Рассмотрим некоторую систему гирь, состоящую из n гирь: $\{q_1, q_2, q_3,\ldots, q_n\}$, где $q_1 = 1$ есть единица измерения, а все остальные гири находятся с единицей $q_1 = 1$ в кратном отношении, причем:

$$q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq, \ldots, \geq q_n . \qquad (1)$$

Ясно, что максимальный груз, который может быть взвешен с помощью данной системы гирь, равен сумме всех имеющихся гирь, то есть

$$Q_{max} = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n . \qquad (2)$$

При этом гири необходимо подобрать так, чтобы из них можно было бы составить любой груз, кратный q_1, от 0 до наибольшего груза. Ясно, что если задана единица q_1=1 и количество гирь n, то вес наибольшего груза является некоторой функцией от n, то есть $Q_{max} = \varphi(n)$. Задача состоит в том, чтобы при заданном n выбрать такую систему гирь, при которой вес наибольшего груза Q_{max} был бы наибольшим для всех допустимых вариантов.

Поясним существо «задачи о гирях» на конкретном примере. Пусть требуется выбрать систему из четырех гирь среди следующих вариантов: {1, 3, 5, 10}, {1, 2, 4, 8}, {1, 2, 3, 5}. Ясно, что первый вариант нас не удовлетворяет, так как с ее помощью невозможно, например, путем сложения составить веса 7, 12, 17. Второй и третий варианты удовлетворяют нашему условию, но второй вариант лучше, поскольку сумма гирь (1+2+4+8=15) для этого варианта больше суммы гирь (1+2+3+5=11) для третьего варианта.

Известно общее решение сформулированной выше задачи [4]. Оно состоит в выборе *двоичной системы гирь* $\{1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}\}$, с которыми последовательно (начиная со старшей гири) происходит сравнение измеряемого веса Q. Указанный способ измерения получил широкое распространение в измерительной практике и носит название *алгоритма поразрядного кодирования* или *«двоичного» алгоритма измерения*. Важно подчеркнуть, что применение этого алгоритма автоматически приводит к представлению результата измерения N в двоичной системе счисления:

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{i-1} ,$$

где $a_i \in \{0, 1\}$- двоичная цифра i-го разряда двоичного кода числа N. В «задаче о гирях» двоичные цифры имеют следующую физическую интерпретацию: $a_i = 1$, если в результате сравнения гири 2^{i-1}

рычажные весы остались в исходном положении «больше»; $a_i = 0$, если чаши весов перешли в противоположное положение «меньше» (мы рассматриваем случай, когда рычажные весы могут находиться только в двух крайних положениях «больше» и «меньше»).

Таким образом, в результате проведенных рассуждений мы неожиданно перешли от алгоритмов измерения к способам представления чисел - и в этом состоит одно из важных практических приложений алгоритмической теории измерения.

Во втором варианте задачи Баше-Менделеева гири разрешается класть на обе чаши весов. Оказалось [2,3], что для этого случая «оптимальным» решением является *«троичная» система гирь* $\{1, 3, 9, 27, \ldots, 3^{n-1}\}$, которая «порождает» троичную симметричную систему счисления:

$$N = \sum_{i=1}^{n} b_i 3^{i-1},$$

где $b_i \in \{-1, 0, 1\}$- троичная цифра i-го разряда троичного представления числа N.

2. Принцип асимметрии измерения

Принципы конечности и потенциальной осуществимости измерительного акта, лежащие в основе алгоритмической теории измерения [4], являются «внешними» по отношению к измерению и носят столь общий характер, что есть опасность ее сведения к некоторому тривиальному результату (например, к доказательству «оптимальности» упомянутого выше «двоичного» алгоритма измерения, который сводит измерение к последовательному сравнению измеряемой величины с «двоичными» гирями: 2^{n-1}, 2^{n-2} , ..., 2^0, начиная со старшей гири).

Для получения нетривиальных результатов методологический базис конструктивной (алгоритмической) теории измерения должен быть дополнен неким общим принципом, вытекающим из самой природы, сущности измерения. Такой принцип непосредственно вытекает из анализа «двоичного» алгоритма измерения, являющегося «оптимальным» решением рассмотренной выше «задачи о гирях».

При внимательном анализе «двоичного» алгоритма измерения обнаруживается одна его особенность, которая имеет общий характер для любых мыслимых измерений, основанных на сравнении измеряемой величины с «эталонными гирями», и наглядно может быть продемонстрирована на модели взвешивания на рычажных весах неизвестного веса $Q<2^n$ с помощью системы двоичных гирь: $\{q_1, q_2, q_3,\ldots, q_n\}$, где $q_i=2^{i-1}$, $i = 1, 2, ..., n$ (Рис. 1).

На первом шаге взвешивания на правую чашу весов кладется «старшая» гиря весом 2^{n-1} (Рис. 1-*а*), что обозначено символом «+» («добавить»). При этом могут возникнуть две ситуации, изображенные на Рис. 1-*а* ($2^{n-1} < Q$) и на Рис. 1-*б* ($2^n \geq Q$). В первом случае (Рис. 1-*а*) следующий шаг состоит в том, чтобы добавить (+) на правую чашу весов очередную по старшинству гирю 2^{n-2}. Во втором случае (Рис. 1-*б*) «весовщик» должен выполнить две операции: снять (-) предыдущую гирю, после чего весы возвращаются в исходное положение (Рис. 1-в); после возвращения рычажных весов в исходное положение он должен добавить (+) на правую чашу весов следующую по старшинству гирю.

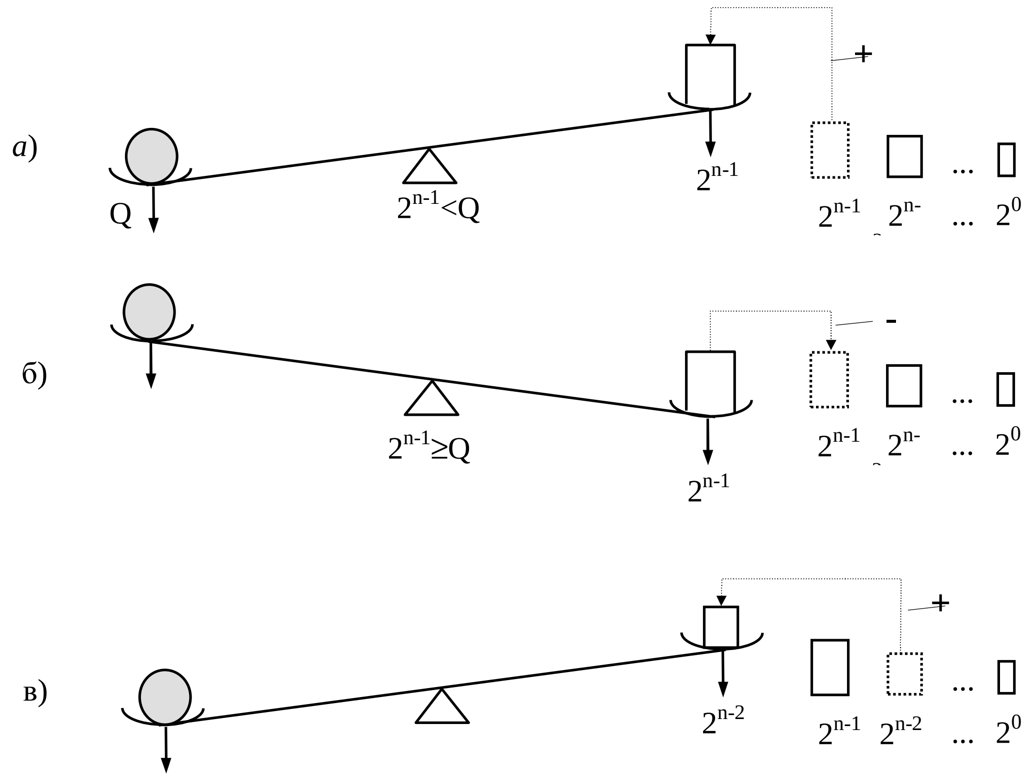

Рисунок 1. Принцип асимметрии измерения

Следовательно, **логика любого сравнения с помощью рычажных весов *«несимметрична»*, так как предполагает различную степень сложности действий «весовщика» в зависимости от положений, в которых оказываются рычажные весы (устройство сравнения) после очередного шага сравнения; при этом действия "весовщика" после получения сигнала "больше" (правая чаша перевесила) оказываются "сложнее" по сравнению с его действиями после получения сигнала "меньше" (весы остались в исходном положении).**

Обнаруженное свойство измерения и составляет содержание *принципа асимметрии измерения* [4]. Сложность действий «весовщика» после получения сигнала «больше» (ситуация на Рис. 1-*б*) определяется двумя факторами. Во-первых, он должен снять гирю и, во-вторых, учесть время, затрачиваемое на «восстановление» весов в исходное положение. Введение *восстановительного периода* устройства сравнения (рычажных весов) и учет этого периода в математической модели измерения и его алгоритме и является центральной идеей алгоритмической теории измерения, вытекающей из принципа асимметрии измерения [4].

3. Новая формулировка «задачи о гирях»

Введем теперь обнаруженное выше свойство измерения в «задачу о гирях», предложенную Фибоначчи. С этой целью будем рассматривать измерение как процесс, протекающий в дискретные моменты времени; и пусть операция «*добавить гирю*» выполняется за одну единицу дискретного времени, а операция «*снять гирю*» (которая сопровождается возвратом рычажных весов в исходное положение) выполняется за p единиц дискретного времени, причем $p \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Ясно, что параметр p как бы моделирует *«инерционность»* рычажных весов. При этом случай p=0 соответствует той «идеальной ситуации», когда мы пренебрегаем «инерционностью» рычажных весов. Именно этот случай и рассматривал Фибоначчи. Для остальных случаев p > 0 мы имеем некоторые новые варианты «задачи о гирях», решение которых и составляет основное содержание рассматриваемой теории.

Дальнейшее обобщение задачи Баше-Менделеева состоит в увеличении рычажных весов от 1 до k (k – натуральное число), причем на левые чаши всех весов положен один и тот же груз Q (такая ситуация соответствует случаю «параллельных измерений», когда одна и та же измеряемая величина сравнивается с «эталонными величинами» с помощью k «компараторов» (такой прием широко используется при измерении электрических величин). В этом случае обобщенная «задача о гирях» может быть сформулирована следующим образом: требуется найти «оптимальный» n-шаговый алгоритм взвешивания (измерения) с помощью системы из k рычажных весов («компараторов»), обладающих «инерционностью» p, при условии, что на каждом шаге измерения гири («эталонные величины») разрешается класть на свободные чаши тех и только тех рычажных весов («компараторов»), которые на этом шаге находятся в исходном положении «больше».

Ясно, что такая задача является несравненно значительно более сложной, чем классическая «задача о гирях» (сформулированная Фибоначчи еще в 13-м веке), которая является частным случаем сформулированной выше задачи для случая k=1 и p=0.

4. Синтез оптимального фибоначчиевого алгоритма

А теперь приступим к обсуждению наиболее неожиданного результата «алгоритмической теории измерения» [4], а именно к «фибоначчиевым» алгоритмам измерения.

Возвратимся снова к математической модели измерения, основанной на «индикаторных элементах», и попытаемся ввести в эту модель ограничение на алгоритм, вытекающий из сформулированного выше *«принципа асимметрии измерения»*. Из этого принципа вытекает следующее «ограничение» на движение ИЭ вдоль отрезка *AB*. Пусть ИЭ приложен к точке *C* на первом шаге n-шагового алгоритма измерения (Рис.2). Тогда может возникнуть две ситуации (а) и (б), показанные на Рис.2. Ясно, что в ситуации на Рис.2-а мы можем прикладывать ИЭ к некоторой точке отрезка *CB* уже на следующем шаге. Однако для ситуации на Рис.2-б мы не имеем права прикладывать ИЭ к точкам отрезка *AC*, потому что рычажные весы, которым в нашей модели соответствует «индикаторный элемент», должны возвратиться в исходное положение в течение p единиц дискретного времени. Таким образом, ограничение *S*, вытекающие из *«принципа асимметрии измерения»*, состоит в том, что для ситуации на Рис.2-б запрещено прикладывать ИЭ к точкам отрезка *AC* в течение p последующих шагов алгоритма.

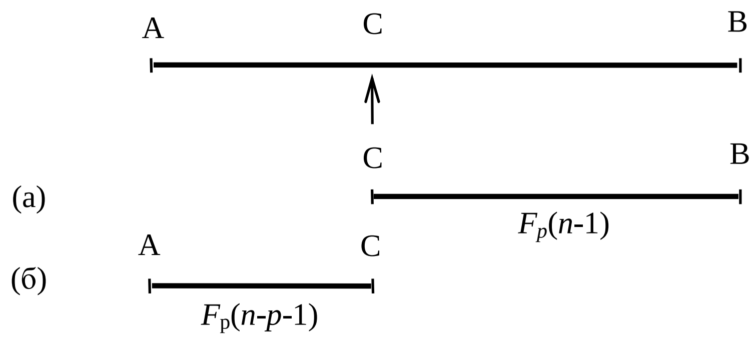

Рисунок 2. Первый шаг «фибоначчиевого» алгоритма измерения

А теперь используем тот же прием, который был нами успешно применен при решении задач синтеза оптимальных (n,k,0)- и (n,k,1)-алгоритмов. Предположим, что при заданном p для любого n существует оптимальный n-шаговый алгоритм, который реализует на отрезке *AB* (n,1)-точность, равную $F_p(n)$; другими словами, оптимальный n-шаговый алгоритм разбивает отрезок AB на $F_p(n)$ равных интервалов единичной длины $\Delta=1$, то есть,

$$AB = F_p(n). \tag{3}$$

Предположим теперь, что 1-й шаг оптимального n-шагового алгоритма состоит в приложении ИЭ к некоторой точке C. Тогда в результате этого шага может возникнуть две ситуации: $(1)\, X \in AC; (2)\, X \in CB$.

Начнем со второй ситуации $X\in CB$. На языке «рычажных весов» эта ситуация означает, что весы остались в том же положении и тогда, согласно *«принципу асимметрии измерения»*, мы имеем право прикладывать на следующем шаге имеющийся в нашем распоряжении ИЭ к точкам отрезка CB. В этом случае, действуя на отрезке CB оптимальным $(n$-1)-шаговым алгоритмом, мы можем разделить интервал неопределенности CB на $F_p(n\text{-}1)$ равных отрезков единичной длины, то есть,

$$CB = F_p(n-1). \tag{4}$$

Рассмотрим теперь ситуацию $X\in AC$. На языке «рычажных весов» эта ситуация означает, что весы перешли в противоположное состояние и тогда, согласно *«принципу асимметрии измерения»*, мы должны подождать p шагов, пока «рычажные весы» не возвратятся в исходное положение. На языке модели «индикаторных элементов» это означает, что мы имеем право прикладывать имеющийся в нашем распоряжении ИЭ к точкам отрезка AC только спустя p шагов после совершения первого шага. Поскольку в нашем распоряжении осталось (n-1) шагов, то наши последующие рассуждения зависят от соотношения чисел p и n-1.

Предположим, что $p \geq n$-1. В этом случае все наши шаги будут исчерпаны до того, как «рычажные весы» перейдут в исходное положение, то есть, на этом процесс измерения фактически заканчивается. Тогда из нашего «индуктивного предположения» вытекает, что отрезок AC должен быть отрезком единичной длины, то есть, для случая $p \geq n$-1 мы будем иметь:

$$AC = 1. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь случай $p<n$-1. Тогда через p шагов после первого шага «рычажные весы» возвратятся в исходное положение, то есть, спустя p+1 шагов с начала измерения, согласно *«принципу асимметрии измерения»*, мы имеем право продолжать измерение, прикладывая ИЭ к точкам отрезка AC (Рис. 2). Но в этом случае у нас останется (n-p-1) шагов. Действуя оптимальным (n-p-1)-шаговым алгоритмом, мы можем разделить его на $F_p(n\text{-}p\text{-}1)$ равных частей единичной длины, то есть,

$$AC = F_p(n-p-1). \tag{6}$$

Поскольку $AB=AC+CB$, то, используя результаты (3)-(6), получим следующее выражение для (n,1)-точности искомого оптимального n-шагового алгоритма:

$$F_p(n) = \begin{cases} n+1 & \textbf{для} \;\; p \geq n-\mathbf{1} \\ F_p(n-1) + F_p(n-p-1) & \textbf{для} \;\; p < n-\mathbf{1} \end{cases} \tag{7}$$

5. Частные случаи

Рассмотрим некоторые специальные случаи формулы (7). Пусть p=0. Для этого случая формула (7) сводится к следующему:

$$F_0(n) = 2\,F_0(n\text{-}1); \tag{8}$$

$$F_0(0) = 1. \tag{9}$$

Ясно, что рекуррентная формула (8) с учетом начального условия (9) «порождает» следующую двоичную последовательность:

$$2, 4, 8, 16, \ldots, F_0(n) = 2^{n-1}.$$

Алгоритм измерения, соответствующий этому случаю, сводится к классическому «двоичному» алгоритму измерения.

Пусть $p = \infty$. Для выше сформулированной задачи это означает, что ИЭ «выбывает из игры», как только он оказывается справа от точки X. Для этого случая формула (7) принимает форму $F_p(n) = n+1$, которая соответствует классическому «алгоритму счета», широко используемому в измерительной практике.

Рассмотрим теперь случай p=1. В этом случае рекуррентная формула (7) принимает следующий вид:

$$F_1(n) = F_1(n\text{-}1) + F_1(n\text{-}2) \text{ для } n>2; \quad (10)$$

$$F_1(1) = 2; \; F_1(2) = 3 \quad (11)$$

Если теперь вычислить «функцию эффективности» $F_1(n)$ согласно (10), (11), то получим следующую числовую последовательность: 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … , которая представляет собой ни что иное, как ряд Фибоначчи! Именно этот факт стал причиной, почему рассматриваемые алгоритмы измерения были названы «фибоначчиевыми» алгоритмами измерения [4].

В Таблице 2 заданы значения функции «эффективности» $F_p(n)$ оптимальных «фибоначчиевых» алгоритмов для различных значений p.

Таблица 2. Функция эффективности $F_p(n)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F_0(n)$	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$F_1(n)$	2	3	5	8	13	21	34	55	89
$F_2(n)$	2	3	4	6	9	13	19	28	41
$F_3(n)$	2	3	4	5	7	10	14	19	26
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$F_\infty(n)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10

А теперь перейдем к системе гирь для «фибоначчиевых» алгоритмов измерения. Легко доказать [4], что для этого случая «оптимальная» система гирь $W_p(n)$ задается следующей формулой:

$$W_p(n) = W_p(n\text{-}1) + W_p(n\text{-}p\text{-}1) \qquad \text{для} \quad n>p+1; \quad (12)$$

$$W_p(1) = W_p(2) = ... = W_p(p+1) = 1. \quad (13)$$

Таблица 3 задает различные варианты «оптимальных» систем гирь, соответствующих различным значениям p.

Таблица 3. Оптимальные системы гирь для «фибоначчиевых» алгоритмов

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$W_0(n)$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$W_1(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34
$W_2(n)$	1	1	1	2	3	4	6	9	13
$W_3(n)$	1	1	1	1	2	3	4	5	7
$\vdots$	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$W_\infty(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Анализ выражений (12), (13) и Табл. 3 приводит нас к неожиданному заключению. Оказывается, числа рекуррентное соотношение (12), (13), задающее «оптимальные» системы гирь для «фибоначчивых» алгоритмов, задает новые числовые последовательности, названные в [4] p-числами Фибоначчи!

6. Пример «фибоначчиевого» алгоритма измерения

Рассмотрим теперь пример «оптимального» «фибоначчиевого» алгоритма, для которого «оптимальная» система гирь задается (12), (13). Пусть p=1 и n=5. Рассмотрим 5-шаговый «фибоначчивый» алгоритм (Рис.3), соответствующий этому случаю.

Из Табл. 2 вытекает, что рассмотренный выше 5-шаговый «фибоначчиевый» алгоритм разделяет исходный отрезок [0,13] на 13 равных частей. Чтобы реализовать такой алгоритм нам необходимо иметь 5 гирь, которые согласно Табл. 3 имеют следующие значения: 1, 1, 2, 3, 5.

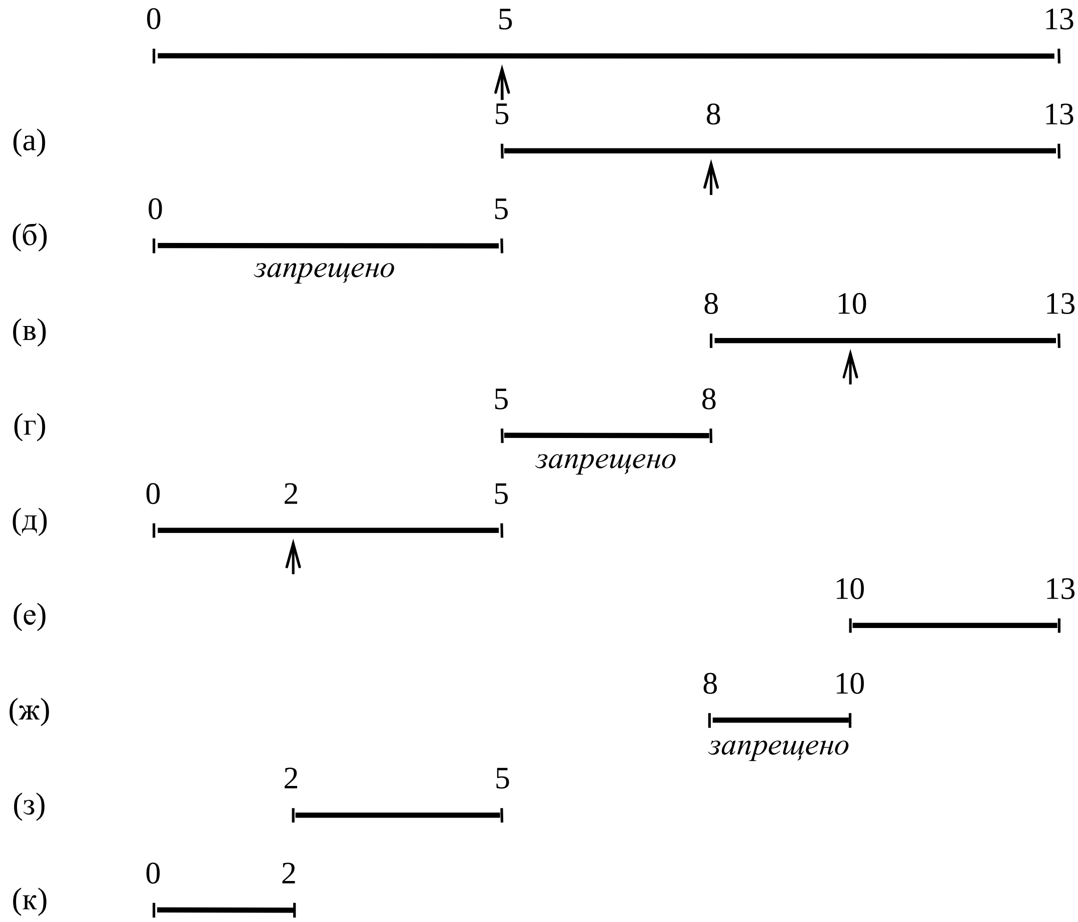

Рисунок 3. Пример «фибоначчиевого» алгоритма

Рассмотрим первые три шага «фибоначчиевого» алгоритма, приведенного на Рис. 3.

Первый шаг алгоритма состоит в приложении ИЭ к точке 5 отрезка [0, 13] (Рис.3). Можно видеть, что первый шаг состоит в разделении отрезка [0, 13] в «фибоначчиевом» отношении: 13 = 5 + 8. Тогда после первого шага возникают 2 ситуации (а) и (б).

Второй шаг.

(а) Для этой ситуации мы выбираем следующую по старшинству гирю 3 и разделяем отрезок [5,13] ИЭ в фибоначчиевом отношении: 8 = 3 + 5. После второго шага возникают две новые ситуации (в) и (г).

(б) Для этой ситуации второй шаг является «пустым», так как согласно «ограничению» S запрещено прикладывать ИЭ к точкам отрезка [0, 5] на втором шаге.

Третий шаг.

(в) В этой ситуации мы используем следующую гирю 2 и разделяем отрезок [8, 13] с помощью ИЭ в «фибоначчиевом» отношении: 5 = 2 + 3. Тогда после третьего шага возникают две новых ситуации (д) и (е).

(г) Мы можем возвратиться к ситуации (б) на 3-м шаге. В соответствии с «ограничением» S мы можем прикладывать ИЭ к точкам отрезка [0,5] на третьем шаге. При этом мы можем использовать гирю 2 и разделить отрезок [0, 5] с помощью ИЭ в «фибоначчиевом» отношении: 5 = 2 + 3. Тогда возникают две новые ситуации (ж) и (з) после третьего шага.

Очень просто проследить действие «фибоначчиевого» алгоритма и на следующих двух шагах.

Таким образом, из этого примера можно усмотреть, что сущность «фибоначчиевого» алгоритма измерения состоит в последовательном разбиении «интервала неопределенности», полученного на предыдущем шаге, в «фибоначчиевом» отношении. Очень просто доказать, что это - общий принцип, который справедлив для любого значения p. При этом деление «интервала неопределенности» осуществляется согласно рекуррентному соотношению для p-чисел Фибоначчи.

И сейчас мы имеем полное право восторгаться математическим методом исследования. Когда мы только приступили к решению обобщенного варианта задачи Баше-Менделеева, основанного на «принципе асимметрии измерения» (Рис.1), мы не делали никаких предположений относительно выражения для функции «эффективности». И мы неожиданно пришли к p-числам Фибоначчи! Их частным случаем являются классические числа Фибоначчи (p=1), открытые Фибоначчи при решении «задачи о размножении кроликов». Неожиданность нашего решения состоит в том, что мы обнаружили числа Фибоначчи в «задаче о гирях», также предложенной Фибоначчи! Таким образом, алгоритмическая теория измерения [4] как бы объединила две знаменитые задачи, сформулированные Фибоначчи в 13 в. – «задачу о гирях» и «задачу о размножении кроликов»!

7. Основной результат алгоритмической теории измерения

Как упоминалось выше, дальнейшее обобщение задачи Баше-Менделеева, основанной на *«принципе асимметрии измерения»* (Рис.1), состоит в следующем. Увеличим число «рычажных весов», участвующих в измерении, от 1 до k. Пусть один и тот же груз Q находится на левой чаше всех рычажных весов. Это соответствует случаю «параллельного» измерения груза Q с использованием k рычажных весов за n шагов. Случай «параллельных» измерений используется очень часто в аналого-цифровых преобразователях электрических величин для повышения их быстродействия. В последнем случае измеряемая электрическая величина поступает параллельно на входы k «компараторов» (электрический аналог «рычажных весов»).

Пусть все «рычажные весы», участвующие в измерении, имеют «инерционность» p, (p = 0, 1, 2, 3, ...). Тогда возникает задача синтеза оптимального (n,k,S)-алгоритма измерения, который использует k «рычажных весов», обладающих «инерционностью» p. Для моделирования «инерционности» рычажных весов (которым соответствуют «индикаторные элементы» в нашей модели измерения) мы вводим понятие «состояния» j-го ИЭ на l-м шаге (j = 1, 2, 3, ... , k; l = 1, 2, 3, ... , n). Обозначим это состояние через $p_j(l)$. Состояние $p_j(l)$ имеет следующую «физическую» интерпретацию. Если на l-м шаге j-е «рычажные весы», соответствующие j-му ИЭ, находятся в исходном состоянии «больше» (это означает, что j-й ИЭ находится слева от точки X), то считается, что $p_j(l)$=0. Если же j-е «рычажные весы» перешли на l-м шаге в противоположное состояние «меньше» (то есть j-й ИЭ оказывается справа от точки X), то считается, что $p_j(l)$=p, где p – заданное целое число, характеризующее «инерционность» рычажных весов.

Если $p_j(l)$>0, то это означает, что j-е «рычажные весы» находятся в стадии перехода в исходное состояние и значит j-й ИЭ не может быть приложен к точкам отрезка AB. Начиная с (l+1)-го шага, состояние j-го ИЭ с каждым шагом уменьшается на единицу.

В общем случае на первом шаге алгоритма «индикаторные элементы» находятся в некотором «начальных состояниях»

$$p_1, p_2, p_3, ..., p_{k-1}, p_k, \tag{14}$$

причем «индикаторные элементы пронумерованы таким образом, чтобы их «начальные состояния» находились в следующих соотношениях:

$$p_1 \le p_2 \le p_3 \le ... \le p_{k-1} \le p_k. \tag{15}$$

Мы не будем углубляться в решение этой довольно сложной математической задачи. Отметим только, что впервые она была решена украинскими математиками **Игорем Витенько** и **Алексеем Стаховым** еще в 1970 г. [5]. Это решение изложено также в книге [4]. В работах [4,5] показано, что «функция эффективности» (n,k,S)-алгоритма в общем случае выражается в виде весьма сложного рекуррентного соотношения, которое зависит не только от заданного числа p=0, 1, 2, 3, ... («инерционность» рычажных весов), числа шагов алгоритма n и числа «индикаторных элементов» k, но и от начальных состояний (14), (15), в которых находятся ИЭ на первом шаге измерения, то есть,

$$F_p(n,k) = F_p(n; p_1, p_2, p_3, ..., p_{k-1}, p_k) \tag{16}$$

В книге [4] проанализированы крайние частные случаи оптимальных (n,k,S)-алгоритмов, полученных для общего случая.

Пусть p=0. Нетрудно доказать, что для этого случая рассмотренный выше оптимальный (n,k,S)-алгоритм сводится к рассмотренному выше оптимальному $(n,k,0)$ -алгоритму, а рекуррентная формула для «функции эффективности» (16) при этом сводится к выражению:

$$F_0(n,k) = (k+1)^n$$

Пусть $p=\infty$ и «начальные состояния» ИЭ на первом шаге алгоритма равны:

$$p_1 = p_2 = p_3 = ... = p_{k-1} = p_k = 0.$$

Показано [4], что для этого случая оптимальный (n, k, S)-алгоритм сводится к рассмотренному выше оптимальному (n,k,1)-алгоритму, а рекуррентная формула для «функции эффективности» (16) сводится к выражению:

$$F(n,k) = C_{n+k}^n = C_{n+k}^k.$$

Наконец, рассмотрим случай k=1. Показано [4], что для этого случая оптимальный (n,k,S)-алгоритм сводится к рассмотренному выше «фибоначчиевому» алгоритму измерения, а рекуррентная формула для «функции эффективности» (16) сводится к выражению (7).

Основной результат алгоритмической теории измерения со всеми неожиданными соотношениями демонстрируется с помощью Табл. 4. Таким образом, «неожиданность» полученного результата заключается в том, что решением обобщенного варианта задачи Баше—Менделеева оказалось весьма общее рекуррентное соотношение для «функции эффективности» (16), приведенное в работе [4]. Это рекуррентное соотношение включает в качестве частных случаев многие комбинаторные формулы, в частности, формулы для числа размещений с повторениями $(k+1)^n$, для числа сочетаний $C_{n+k}^k = C_{n+k}^n$, формулы для двоичного (2^n) и натурального (n+1) рядов чисел, а также рекуррентное соотношение для p-чисел Фибоначчи.

Таблица 4. Основной результат алгоритмической теории измерения

	$p = 0$		$0 \le p \le \infty$		$p = \infty$
$k \ge 1$	$(k+1)^n$	$\leftarrow$	$F_p(n, k)$	$\rightarrow$	$C_{n+k}^{k} = C_{n+k}^{n}$
			$\downarrow$		
$k = 1$	2^n	$\leftarrow$	$F_p(n) = F_p(n\text{-}1) + F_p(n\text{-}p\text{-}1)$	$\rightarrow$	$n+1$
	Двоичный ряд		***p*-числа Фибоначи**		**Натуральный ряд**

Полученный результат сам по себе представляет интерес, как для комбинаторики, так и для теории чисел, однако он может привести к более глубоким выводам методологического характера, если учесть, что *«при своем зарождении понятие числа, ставшее затем основой арифметики, не только имело конкретный характер, но и было неотделимо от понятия измерения, легшего позднее в основу геометрии. В процессе дальнейшего развития математики эти понятия все больше дифференцируются и вместе с тем каждый раз на новом, высшем этапе происходит их объединение»* ([6], с. 16).

В этом высказывании подчеркнута связь понятия числа с понятием измерения. Это дает нам основание утверждать следующее. Алгоритмическая теория измерения затрагивает основы математики, в частности, такой слабо развитый раздел современной теории чисел, как системы счисления. В книге [4], опубликованной в 1977 г., автор написал следующее:

«Восходящее к Платону пренебрежительное отношение к «школьной» арифметике и ее проблемам, а также отсутствие какой-либо достаточно серьезной потребности к созданию систем счисления в практике вычислений, в течение ряда столетий всецело удовлетворявшейся десятичной системой, а в последние десятилетия - двоичной системой (в цифровой вычислительной технике), и могут служить объяснением того факта, что в теории чисел не уделялось должного внимания системам счисления и в этой части она не намного ушла вперед по сравнению с периодом своего зарождения».

И с этой точки зрения алгоритмическая теория измерения [4] представляет собой необычную математическую теорию. Ее необычность состоит в том, что в ней впервые в истории математики была поставлена **задача исследования алгоритмов измерения.** При этом каждый «оптимальный» алгоритм измерения «порождает» свой позиционный способ представления натуральных чисел. Например, оптимальные $(n,k,0)$-алгоритмы «порождают» все известные позиционные системы счисления, включая Вавилонскую 60-ричную, десятичную и двоичную системы счисления. Оптимальные $(n,k,1)$-алгоритмы «порождают» биномиальные системы счисления, которые уже переходят в практическую область [7]. Наконец, фибоначчиевые алгоритмы измерения «порождают» так называемые *p-коды Фибоначчи,* получившие широкую известность.

Это означает, что в алгоритмической теории измерения впервые была предпринята попытка синтеза не только новых, неизвестных ранее алгоритмов измерения, но и создания новых, неизвестных раннее позиционных систем счисления и компьютерных арифметик.

8.Фибоначчиевые алгоритмы измерения и *p*-коды Фибоначчи

Подобно тому, как «двоичный» алгоритм измерения порождает «двоичную» систему счисления, *«фибоначчиевые» алгоритмы измерения* [4], порождают новые способы позиционного представления натуральных чисел:

$$N = a_nF_p(n) + a_{n-1}F_p(n-1) + \ldots + a_iF_p(i) + \ldots + a_1F_p(1), \qquad (17)$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра i-го разряда позиционного представления (17); n – разрядность кода (17).; $F_p(i)$ – вес i-го разряда, равный i-му p-числу Фибоначчи.

Напомним, что веса разрядов $F_p(i)$ в представлении (17) связаны следующим рекуррентным соотношением:

$$F_p(i) = F_p(i-1) + F_p(i-p-1); \quad F_p(1) = F_p(2) = ... = F_p(p+1) = 1 \qquad (18)$$

Сокращенная запись суммы (17) имеет следующий вид:

$$N = a_n \, a_{n-1} \, ... \, a_i \, \ldots \, a_1. \qquad (19)$$

Заметим, что позиционное представление (17) включает в себя бесконечное число различных позиционных представлений, потому что каждое p «порождает» свое собственное позиционное представление (17) (p = 0, 1, 2, 3, ...).

Пусть p = 0. Для этого случая 0-числа Фибоначчи $F_0(i)$ совпадают с «двоичными» числами, то есть, $F_0(i) = 2^{i-1}$ и тогда представление (17) принимает форму «двоичного» кода:

$$N = a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + ... + a_i 2^{i-1} + ... + a_1 2^0 \qquad (20)$$

Пусть p =1. Для этого случая 1-числа Фибоначчи $F_1(i)$ совпадают с классическими числами Фибоначчи, то есть, $F_1(i) = F_i$ и для этого случая представление (17) принимает следующий вид:

$$N = a_n F_n + a_{n-1} F_{n-1} + ... + a_i F_i + ... + a_1 F_1. \qquad (21)$$

Напомним, что веса разрядов F_i в представлении (21) связаны рекуррентным соотношением Фибоначчи:

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}; \quad F_1 = F_2 = 1 \qquad (22)$$

Именно на этом основании позиционное представление (21) называется *кодом Фибоначчи,* а более общее представление (17) – *p-кодом Фибоначчи* [4].

Пусть теперь p=∞. В этом случае все p-числа Фибоначчи (18) тождественно равны 1, то есть, для любого i имеем: $F_p(i)$ = 1. В этом случае представление (17) принимает следующий вид:

$$N = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{N}. \qquad (23)$$

Таким образом p-коды Фибоначчи являются весьма широким обобщением «двоичного» кода (20), соответствующего случаю p=0. Частными случаями p-кодов Фибоначчи являются код Фибоначчи (21) (p=1) и «унитарный» код (23) (p = ∞).

Таким образом, *алгоритмическая теория измерения* [4] приводит нас к важному математическому результату в области теории систем счисления. Формула (17), задающая p-код Фибоначчи, является обобщением «двоичной» системы счисления (20)! Благодаря этому мы теперь знаем, что существует бесконечное число «двоичных» позиционных представлений, которые задаются некоторой общей формулой (17)! И классическая «двоичная» система счисления (20) является лишь частным случаем p-кода Фибоначчи (17).

Но «двоичная» система счисления (20) является основой современных компьютеров! Но тогда возникает вопрос: если мы будем использовать «фибоначчиевые» представления (17), то, возможно, придем к новым компьютерам - *компьютерам Фибоначчи*, как новому направлению в развитии компьютерной техники!

Литература

1. Бородин А.И., Бугай А.С. Биографический словарь деятелей в области математики. Пер. с укр. Киев: Радянська школа, 1979.
2. Давыдов Е.С. Наименьшие группы чисел для образования натуральных рядов. Санкт-Петербург, 1903.
3. Гартц В.Ф. Лучшая система для весовых гирь. Санкт-Петербург, 1910.
4. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
5. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во

Харьковского университета, 1970.
6. Кольман Э. История математики в древности. М.: Физматгиз, 1961.
7. Борисенко А. А. Биномиальный счет. Теория и практика. Сумы: Университетская книга, 2004