В.П. Шенягин

Дробные *f*-пропорции

Задача должна быть такой,
чтобы возникло желание её решить.
В. Произволов

Из истории – постановка задачи

Цепные дроби, используемые в качестве моделей описания различных процессов природных явлений, также как и повторные корни, чаще всего являются неправильными.

Отсюда следовала задача – найти пропорцию, характеризуемую непрерывной цепной *правильной* фрактальной дробью, как коэффициент f_m, в том числе для прямых f_m и обратных $\bar{f}_m$ пропорций соответственно, т. е.:

$$\lim_{n\to\infty}\left(m+\cfrac{m}{m+\cfrac{m}{m+\ldots}}\right)=f_m; \tag{A$_1$}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(m-\cfrac{m}{m-\cfrac{m}{m-\ldots}}\right)=\bar{f}_m, \tag{A$_2$}$$

где m – любое действительное число, включая нуль, определяющее номер коэффициента f;

n – целое число, определяющее количество операций деления в цепной дроби.

Хотя, точнее правильной непрерывной дробью называют дробь, в числителях членов цепи которой содержатся единицы.

В нашей же модели мы стремимся придать сочетанию «правильная непрерывная дробь» *правильный образ,* который станет характеризовать непрерывную дробь, составленную *лишь из одних m*. Кстати, такую дробь можно именовать не только правильной, но и *симметричной*.

Из (A_1) и (A_2) следовали фрактальные равенства

$$f_m=m+\frac{m}{f_m}; \tag{B$_1$}$$

$$\bar{f}_m=m-\frac{m}{\bar{f}_m}, \tag{B$_2$}$$

приводящее к уравнениям

$$f_m^2-mf_m-m=0; \tag{C$_1$}$$

$$\bar{f}_m^2+m\bar{f}_m-m=0 \tag{C$_2$}$$

с арифметическими корнями

$$f_m=\frac{m+\sqrt{m^2+4m}}{2}; \tag{D$_1$}$$

$$\bar{f}_m = \frac{\sqrt{m^2+4m}-m}{2}. \qquad (D_2)$$

f-пропорции как правильные непрерывные дроби и их представление различными моделями опубликованы, например, в работах [1, 2, 3].

Функции, параметры, свойства f-пропорций

Приведем основные выражения, характеризующие прямые f-пропорции, механизм нахождения которых стал уже типичным, отработанным многими исследователями.

1. *Уравнение*

Уравнение (A_1)

$$f_m^2 - m f_m - m = 0 \qquad (1)$$

определяет пропорции, характеризуемые правильной симметричной цепной дробью.

2. *Корень уравнения*

$$f_{m_{1,2}} = \frac{m \pm \sqrt{m^2+4m}}{2}. \qquad (2)$$

3. *Сумма целого и обратного значения пропорции*

Из (1), при делении всех членов уравнения на $f_m \neq 0$, вытекает фрактальное равенство

$$f_m = m + \frac{m}{f_m}, \qquad (3)$$

$$f_m = m\left(1+\frac{1}{f_m}\right). \qquad (3a)$$

4. *Соотношение между целым и частями*

Коэффициент пропорциональности между целым и его частями находится из (3а).

Приняв $f_m = \frac{A}{a}$, получим, $\frac{A}{a} = m\left(1+\frac{a}{A}\right)$.

Соотношение между целым и его частями определяется тождеством

$$\frac{A}{a} = m\frac{A+a}{A}. \qquad (4)$$

Дробные f-пропорции выражают деление отрезка в пропорции, при которой отношение его большей части A к меньшей a равно увеличенному в m раз отношению всего отрезка $A+a$ к большей части A.

Представим (4) по-иному

$$\frac{A+a}{A} = \frac{1}{m}\cdot\frac{A}{a}. \qquad (4a)$$

Дробные f-пропорции выражают деление отрезка в пропорции, при которой отношение всего отрезка $A+a$ к большей части A равно уменьшенному в m раз отношению большей части A к меньшей a.

5. *Последовательность*

Приняв в (3а) $f_m = \frac{u_n}{u_{n-1}} \approx \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$, получим $\frac{u_n}{u_{n-1}} = m\left(1 + \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}\right)$.

Откуда $u_n = m(u_{n-2} + u_{n-1})$;

$$u_n = mu_{n-2} + mu_{n-1}. \qquad (5)$$

При этом оба предыдущих члена последовательности берутся с равными весами m.

Последовательность определяется системой

$$\begin{cases} u_1, u_2, \\ u_n = mu_{n-2} + mu_{n-1}. \end{cases} \qquad (5а)$$

6. *Отношение смежных чисел последовательности*

Предел отношения смежных чисел последовательности находится из (5)

$$f_m = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = m \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-2} + u_{n-1}}{u_{n-1}} = m\left(1 + \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}\right) = m\left(1 + \frac{1}{f_m}\right), \qquad (6)$$

что соответствует (3а).

7. *Квадрат пропорции*

Из (1) вытекает равенство

$$f_m^2 = m + mf_m. \qquad (7)$$

8. *Фрактальный корень*

Выражение (7) есть фрактал

$$f_m = \sqrt{m + mf_m}; \qquad (8)$$

$$f_m = \sqrt{m + mf_m} = \sqrt{m + m\sqrt{m + f_m}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{m + m\sqrt{m + m\sqrt{m + \ldots}}}.$$

Упустив знак предела, можно записать

$$f_m = \sqrt{m + m\sqrt{m + m\sqrt{m + \ldots}}}. \qquad (8а)$$

9. *Фрактальная дробь*

Фрактальное равенство (3) приводит к представлению пропорции в виде непрерывной дроби

$$f_m = m + \frac{m}{f_m} = m + \frac{m}{m + \frac{m}{f_m}} = m + \lim_{n\to\infty} \frac{m}{m + \frac{m}{m + \ldots}}.$$

Упустив знак предела, запишем

$$f_m = m + \frac{m}{m + \frac{m}{m + \ldots}}. \qquad (9)$$

10. *Наименование*

Рассмотренные пропорции логично и целесообразно именовать квадратичными дробными пропорциями или сокращенно дробными f-пропорциями, или кратко *f-пропорциями* (*fraction* – дробь) [4].

11. *Обозначение*

Рассмотренные пропорции логично и целесообразно обозначить символом s_{f_m} (как принадлежащими к группе квадратичных *s*-пропорций, куда входят основные ϕ-, *r*-, *s*-пропорции, а также иные) или кратко символом f_m что выделяет слово *fraction* – дробь.

12. *Доминанта*

Доминантой, видимо, следует считать соотношение (9)

$$f_m = m + \cfrac{m}{m + \cfrac{m}{m + \dots}}.$$

Численные значения *f*-пропорций

Результаты представим в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

Прямые f_m-пропорции

m	Уравнение	Дробь	u_n	Корень уравнения	Число f_m
0	$f_0^2 = 0$	$0 + \cfrac{0}{0 + \cfrac{0}{0 + \dots}}$	–	$\frac{0+\sqrt{0}}{2} = 0$	0
1	$f_1^2 - f_1 - 1 = 0$	$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}$	$u_{n-2} + u_{n-1}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1,6180339
2	$f_2^2 - 2f_2 - 2 = 0$	$2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \dots}}$	$2u_{n-2} + 2u_{n-1}$	$\frac{2+\sqrt{12}}{2} =$ $= 1 + \sqrt{3}$	2,7320508
3	$f_3^2 - 3f_3 - 3 = 0$	$3 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{3 + \dots}}$	$3u_{n-2} + 3u_{n-1}$	$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$	3,7912878
4	$f_4^2 - 4f_4 - 4 = 0$	$4 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{4}{4 + \dots}}$	$4u_{n-2} + 4u_{n-1}$	$\frac{4+\sqrt{32}}{2} =$ $= 2 + 2\sqrt{2}$	4,8284271
5	$f_5^2 - 5f_5 - 5 = 0$	$5 + \cfrac{5}{5 + \cfrac{5}{5 + \dots}}$	$5u_{n-2} + 5u_{n-1}$	$\frac{5+\sqrt{45}}{2}$	5,8541019
m	$f_m^2 - mf_m - m = 0$	$m + \cfrac{m}{m + \cfrac{m}{m + \dots}}$	$mu_{n-2} + mu_{n-1}$	$\frac{m+\sqrt{m^2+4m}}{2}$	f_m

Таблица 2

Обратные $\bar{f}_m$-пропорции

m	Уравнение	Дробь	u_n	Корень уравнения	Число $\bar{f}_m$
0	$\bar{f}_0^2 = 0$	$0-\cfrac{0}{0-\cfrac{0}{0-\ldots}}$	–	$\frac{\sqrt{0}-0}{2}=0$	0
1	$\bar{f}_1^2 + \bar{f}_1 - 1 = 0$	$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\ldots}}$	$u_{n-2} - u_{n-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	0,6180339
2	$\bar{f}_1^2 + 2\bar{f}_1 - 2 = 0$	$2-\cfrac{2}{2-\cfrac{2}{2-\ldots}}$	$2u_{n-2} - 2u_{n-1}$	$\frac{\sqrt{12}-2}{2} = \sqrt{3}-1$	0,7320508
3	$\bar{f}_3^2 + 3\bar{f}_3 - 3 = 0$	$3-\cfrac{3}{3-\cfrac{3}{3-\ldots}}$	$3u_{n-2} - 3u_{n-1}$	$\frac{\sqrt{21}-3}{2}$	0,7912878
4	$\bar{f}_4^2 + 4\bar{f}_4 - 4 = 0$	$4-\cfrac{4}{4-\cfrac{4}{4-\ldots}}$	$4u_{n-2} - 4u_{n-1}$	$\frac{\sqrt{32}-4}{2} = 2\sqrt{2}-2$	0,8284271
5	$\bar{f}_5^2 + 5\bar{f}_5 - 5 = 0$	$5-\cfrac{5}{5-\cfrac{5}{5-\ldots}}$	$5u_{n-2} - 5u_{n-1}$	$\frac{\sqrt{45}-5}{2}$	0,8541019
m	$\bar{f}_m^2 + m\bar{f}_m - m = 0$	$m-\cfrac{m}{m-\cfrac{m}{m-\ldots}}$	$mu_{n-2} - mu_{n-1}$	$\frac{\sqrt{m^2+4m}-m}{2}$	$\bar{f}_m$

В таблице 3 приведем числовые последовательности, характеризующие прямые *f*-пропорции.

Таблица 3

Последовательности чисел $\begin{cases} u_1, u_2, \\ u_n = mu_{n-2} + mu_{n-1} \end{cases}$

m	u_n	Последовательность чисел	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$
0	u_{n-1}		0
1	$u_{n-2} + u_{n-1}$	0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …	1,618…
2	$2u_{n-2} + 2u_{n-1}$	0, 1, 2, 6, 16, 44, 120, 328, 896, 2448, 6688, 18272, …	2,732…
3	$3u_{n-2} + 3u_{n-1}$	0, 1, 3, 12, 45, 171, 648, 2457, 9315, 35316, 133893, …	3,791…
4	$4u_{n-2} + 4u_{n-1}$	0, 1, 4, 20, 96, 464, 2240, 10816, 52224, 252160, …	4,828…
5	$5u_{n-2} + 5u_{n-1}$	0, 1, 5, 30, 175, 1025, 6000, 35125, 205625, 1203750, …	5,854…

Выводы

Ни один математик не мыслит формулами.
А. Эйнштейн

1. Дробные f-пропорции могут выполнять самостоятельную роль в области гармонии, являясь *обособленными пропорциями*, наделенными всеми классическими свойствами (рекуррентный ряд, отношение соседних членов ряда, соотношение целого и частей и т. п.) – поскольку нет лучшей пропорции вообще, но есть лучшая пропорция для конкретного объекта.

При этом собственно уравнение (1) и его корень можно встретить в сборниках задач по алгебре. Однако отличие изложенного материала заключается в нахождении системы пропорций, величины которых характеризуются, в том числе, и данным уравнением, и свойствами, вытекающими из него.

2. Дробные f-пропорции, казалось бы, не носят такого фундаментального характера, как мантиссовые s- и корневые r-пропорции.

Однако они заслуживают внимания хотя бы тем, что дополняют стройную систему пропорций, занимая *собственное место* в группе пропорций, выраженных системой *младших* (*квадратичных*) *степенных пропорций* [4], из которых, для напоминания, приведем главные четыре:

1) $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ – уравнение золотой пропорции;

2) $r_m^2 - r_m - m = 0$ – уравнение корневых r-пропорций (*root* – корень, сущность);

3) $s_m^2 - ms_m - 1 = 0$ – уравнение мантиссовых или квадратичных s-пропорций (*square* – квадрат, квадратичный; прямой, честный, справедливый);

4) $f_m^2 - mf_m - m = 0$ – уравнение дробных f-пропорций (*fraction* – дробь).

А данная группа пропорций, равно как и иные группы и их уравнения, в т. ч. А.П. Стахова и Э.М. Сороко, создает матрицу коэффициентов гармонии, где свой вклад вносят и f-пропорции, занимая свое особое место при их ранжировании.

3. Факты отнесения дробных f-пропорций к классу фундаментальных физических констант или констант в других отраслях знаний требуют дальнейших поисков, наблюдений и исследований.

По крайней мере, их можно использовать при формировании сигналов с изменяющимися периодами.

Во всяком случае, математические свойства дробных f-пропорций интересны.

Источники

1. *Шенягин В.П.* Доминанты пропорций и последовательностей / INTERMATIC-2005 // Материалы Международной научно-технической конференции «Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения», 25-28 октября 2005 г., г. Москва. – М.: МИРЭА, 2006, часть 2. – 284 с., с. 31-40.

2. *Шенягин В.П.* s-пропорции и сигналы / Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. Серия: Научная сессия, посвященная Дню радио. Выпуск: LXI, 17-18 мая 2006 г., г. Москва. - М.: 2006. – 394 с.,

с. 390-393.

3. *Шенягин В.П.* Сущность чисел и их взаимосвязь с золотой *ф*-пропорцией / INTERMATIC-2004 // Материалы Международной научно-практической конференции «Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения», 7-10 сентября 2004 г., г. Москва. – М.: МИРЭА – ЦНИИ «Электроника», 2004, часть 2, с. 26-31.

4. *Шенягин В.П.* Системы пропорций и их использование при формировании сигналов / Международная научно-техническая конференция к 100-летию со дня рождения В.А. Котельникова: Москва, 21-23 октября 2008 г.: Тезисы докладов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008. – 176 с., с. 43-45.

$$f_m = m + \cfrac{m}{m + \cfrac{m}{m + \ldots}}$$

$$\frac{A}{a} = m\frac{A+a}{A}; \quad \frac{A+a}{A} = \frac{1}{m}\cdot\frac{A}{a}$$

$$\begin{cases} u_1, u_2, \\ u_n = mu_{n-2} + mu_{n-1} \end{cases}$$

$$f_m^2 - mf_m - m = 0; \quad f_m = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2}$$

Нет лучшей пропорции вообще, но есть лучшая пропорция для конкретного объекта