В. М. Комаров, В.Ю. Татур

БЕСКОНЕЧНОСТЬ И ГАРМОНИЯ. ГЛАВА 1

(Бесконечность и гармония в природе и человеке – естественнонаучные и математические аспекты)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Во все времена человечество стремилось для себя уяснить – какова мера познавательных возможностей человека. В самом деле, каковы они? Конечны, бесконечны или абсолютны? Или, иными словами, в какой степени окружающий нас Мир познаваем?

Для полноты освещения данной темы, следует сразу же принять во внимание полярную гностицизму гипотезу, допускающую, что человеческие возможности познания не беспредельны и, по крайней мере, в условиях его земного существования ограничены какими-то принципиально неустранимыми рамками. Тогда проблема *познаваемости* приобретает оттенок звучания прямо противоположного смысла, (для этого также есть вполне веские основания), а именно, что имеется множество вещей, сущность которых для человека сокровенна и является подлинной, т.е. принципиально не раскрываемой тайной?

Об этом необычном понятии Тайна в свое время неординарно высказался А.Ф. Лосев [24]: «*Тайна не есть просто отсутствие, небытие. Она также не есть то, что может быть раскрыто или разрешено. Тайна, которая может быть раскрыта, есть вовсе не тайна, а только наше недомыслие, более или менее случайная загадка и незнание ввиду тех или иных обстоятельств.* ***Тайна есть то, что по существу своему никогда не может быть раскрыто*** (*курсив наш*). *Но она может являться. Явление тайны не есть уничтожение или разрешение тайны, но есть только такое ее состояние, когда она ясно ощутима, представима, мыслима и сообщима – притом сообщима именно как тайна же*».

Понятие Тайна затронуто не случайно. В свете данного А.Ф. Лосевым определения с нашей точки зрения такие феномены как Музыка, Человек и сама Жизнь, явившиеся предметом исследования данной книги, вполне возможно квалифицировать как именно Тайны, т.к. несмотря на пристальное к ним внимание всего человечества, и, несмотря на то, что все мы являемся самыми, что ни на есть непосредственными зрителями этих тайн, - они остаются, по нашему мнению, не менее таинственными до сих пор.

Последние 200 лет с ними соприкоснулась и наука. И что же? Ситуация с познанием указанных феноменов, если не заниматься самообманом, кардинально не изменилась - тайны так и остались тайнами. А научные исследования, проведенные огромной армией ученых, только увеличили количество загадок, сделали их более отчетливо заметными, и обострили тем самым к ним наше внимание.

Можно ли сказать, что человеческий Разум – общепризнанный «двигатель прогресса» современной цивилизации и основной инструмент научного познания - перед лицом этих загадок отступил? Наверное, пока еще нет, хотя и породил в отношении к этим предметам еще больше вопросов, парадоксов и софизмов[1].

К более тесному соприкосновению, подчеркнем, что именно *соприкосновению* с указанными феноменами, а не вскрытию их сущности к настоящему моменту, позволяет прийти такое известное понятие, как Число. Из всех известных понятий оно является наиболее гибким средством описания и моделирования всякого порядка, отношения, пропорции, соразмерности, которыми так богато содержание Музыки, Человека и Жизни.

В отношении скорости, точности и объема проводимых операций с числами математика и современные компьютерные технологии значительно усиливают интеллектуальные возможности человека, открывая совершенно новые возможности в исследовании указанных предметов. В данной проблемно-исследовательской работе с привлечением современных научных технологий в той или иной мере затронуты все три упомянутых феномена, а полученные при этом результаты в довольно сжатом виде изложены в форме почти «сухого» научного отчета. Поэтому данная книга

---

[1] К парадоксам, в частности Музыки, можно отнести следующие:

- будучи крайне *подвижной и динамичной* музыка порождает в своих образах *неподвижность, покой*, и раскрывает таким образом в себе самой крайнюю степень покоя – Вечность;
- будучи *земной* вибрацией, она открывает окно в *неземное*;
- не имея слов, она несет смысл и т.п.

Всякая новая ступень познания этого феномена, отчасти разъясняя его, не заполняет в удовлетворительной степени всю область незнания его сущности, т.к. открывает при этом еще более обширные горизонты неизведанного и загадочного.

предназначена в большей степени для различного рода специалистов: математиков, теоретиков музыки, биологов, чем для широкого круга читателей.

Работа над темами, затронутыми в данной книге, протекала крайне неравномерно, с разной плотностью охватывая период во времени примерно в три десятилетия. Первый ее этап самый плодотворный, но вместе с тем, к сожалению, и самый короткий, начался в семидесятых годах прошлого века в «Студии электронной музыки» им. А.С. Скрябина, основанной в пятидесятых годах прошлого века Е. Мурзиным. Именно в тот период зарождались основные идеи данной работы.

Разработка темы бесконечности, как впрочем, и темы Гармонии, требует к себе особого отношения, особого состояния внутренней свободы, которая в те старые «добрые» времена подвергалась заметному прессингу известного всем «режима». И потому островок раскрепощения, царившего тогда в Студии, был как никогда в этом отношении кстати. Его устойчивость как-то непринужденно и естественно опиралась на личность (крайне творческую, ищущую и свободолюбивую) руководителя Студии Марка Малкова (1918-1998). Его усилиями поддерживалась функция притяжения к Студии всему родственному, ищущему и стремящемуся. В основном это были творческие личности – художники, музыканты, математики, физики и даже политики. Достаточно упомянуть имена таких покровителей Студии, как Д. Д. Шостакович, А.Н. Косыгин и др.

Основное направление деятельности Студии – синтез передовых достижений науки для создания новых средств выразительности в искусстве. Содержимое Студии напоминало некую виртуальную реальность, только с той существенной оговоркой, что ее создатели, прежде всего, заботились о гармоничности ее наполнения, и что в той или иной мере удавалось время от времени реализовывать. Удивительно, но в Студии никто никому не мешал: математики занимались математикой, физики – физикой, музыканты - музыкой…, а все вместе синтезом науки и искусства.

В более поздние периоды времени появлению этой книги весьма способствовала поддержка со стороны многих замечательных людей. В особенности хочется выразить искреннюю благодарность о. Алексею (Казанцеву), за утверждение на стезе исследований систем темперации, - краеугольном камне средств музыкальной выразительности, Н.Г. Волкову, М.Н. Владимирову, В.Б. Кудрину за помощь и участие в разработке проблем, затронутых в данной книге; Я.Р. Василькову, Н.В. Рощину, В.И. Шевеленко за практическую помощь в продвижении книги к публикации и непосредственное участие в разработке сложнейшей темы, которая проводилась совместно с ними - биоритмики почвы; Л.В. Хазиной за совместное проведение целого ряда исследований, касающихся биоритмики сердца, а также, обсуждение связанных с этим философских и методологических вопросов; А.В. Кабанову за весьма тщательную редакторскую проработку текста.

Ценные замечания по существу и форме математического содержания данной книги сделали А.Г. Иванов, Б.А. Гречушкин и В.П. Троицкий, что способствовало заметному улучшению ее формы и содержания.

ВВЕДЕНИЕ

Попытаемся вначале максимально коротко сказать, о чем эта книга и кому она предназначена? В первой ее главе идет речь о математике, а именно о создании тех новых средств ее выразительности, которые могли бы быть полезны в предпринятой нами разработке двух тем: темы Гармонии музыки, и второй темы, очень родственной первой, темы ритмической организации живых организмов. Нужно, конечно, заметить, что и музыка и все живое являются феноменами, в которых движение, вибрации проявляют себя в самой высокой степени организации. Их структуры до сих пор мало изучены, и их познание наталкивается на еще одно таинственное препятствие - стену бесконечности, лежащую в основании этих объектов нашего внимания.

Любой исследователь на первых же шагах продвижения в указанном направлении познания начинает нуждаться в соответственных более или менее адекватных математических средствах. Поэтому в первой главе начато освещение вопросов построения новых действий над числами, которые бы расширяли спектр возможностей современной математики, и были бы, вместе с тем естественным, можно даже сказать, генетическим продолжением известного ряда действий современной арифметики, начинающегося, как известно с простейшего действия над числами - *сложения*.

Оказалось, что таких действий можно ввести в рассмотрение и далее исследовать их свойства бесконечное множество. Для практического осуществления этого намерения нужно было предпринять некоторую переработку известных и уже довольно привычных определений понятий Числа и Действия над ним. Выяснилось, во-первых, что с некоторыми моментами определений этих фундаментальных понятий далеко не так все просто, ясно и очевидно, как может показаться с первого взгляда, и что, во-вторых, к Числу и Действию над числом имеет прямое отношение Бесконечность. Здесь, конечно, имеется ввиду не та «бесконечность», которая уже используется в современном анализе, и обозначается в виде «поверженной» восьмерки ∞. Она является по сути дела обыкновенной финитной, конечной *переменной* величиной, возрастающей сверх всяких границ (названная Г. Кантором по этой причине не собственно бесконечностью), но всегда остающейся все же величиной конечной. Речь идет об Актуальной бесконечности. По мнению Г. Кантора - создателя и автора теории множеств, в которой Актуальная бесконечность - центральное понятие, и является более совершенным средством познания окружающего мира, чем известные доселе финитные категории и понятия традиционной системы знания.

Нам было трудно с этим не согласиться в особенности после того, как выяснилось, что **Число, арифметическое Действие и Актуальная бесконечность** являются представителями триединой сущности, и что между ними существует связь, которая вполне может изучаться математическими же методами. Об этих вопросах, короче говоря, и идет речь в первой главе.

Вторая глава посвящена исследованию **структур движения** и представляет собой некое введение в теорию структур, подчеркиваем, именно структур *движения*, а не пространства. Здесь нам пришлось, вполне естественно, преодолевать некую инерцию мышления, связанную с тем, что, чаще всего, говоря о тех или иных структурах, имеют ввиду не временной, а пространственный аспект.

Выдающийся русский философ А.Ф. Лосев, разрабатывая в своих работах систему абсолютной диалектики, показывает, что движение – *первопринцип бытия*. Исходя из этого, естественно надеяться, что изучение структур движения средствами современной науки, и, в частности, математики, позволит создать чрезвычайно важное дополнение к знаниям о пространственных структурах окружающего нас мира. Таким образом, вторая глава – это попытка дать введение в теорию структур движения, названную нами **ритмотектоникой.**

Вообще говоря, в том виде, в котором излагаются наметки теории ритмотектоники во второй главе, можно было бы интерпретировать как некое обобщение обычной голографии на … некогерентный случай, и, что в таком виде, она находит интерпретацию в теории музыки, как теория консонансов, как теория музыкальной гармонии.

Главный вывод второй главы состоит в том, что проблема синхронизации, т.е. проблема создания компактных волновых пакетов и динамических структур - проблема мультипликативная, и потому требует для своего математического оформления соответствующего мультипликативного аппарата алгебры и анализа. В приложении 1 вместе с «Исчислением действий» предлагаются подходы к созданию именно такого рода специфического анализа.

Таким образом, вторая глава является более или менее прикладной, т.к. после нее можно уже было более или менее осмысленно проводить научные исследования феноменов Музыки и ритмов Живого, и исследовать под новым углом зрения структуры вибраций музыки и ритмотектонику функциональной организации живых организмов.

Первые экспериментальные результаты, полученные нами в этом направлении, составили содержание самой прикладной, конкретной и наименее абстрактной третьей главы.

В ней представлены результаты экспериментальных исследований биоритмов живых организмов, на основе измерения и анализа сигналов, зарегистрированных с почвы и снятых с сердца человека. Кроме того, в заключительном разделе дается описание прикладного применения теории ритмотектоники, реализованной в компьютерной версии синтезатора гармонизированных вибраций - «МУЛЬТИСФЕРА-2000».

Далее в продолжении этого введении дается более развернутая картина содержания данной книги, хотя конечно для прочтения ее нельзя рекомендовать как обязательную.

Бесконечность и Гармония

Как уже обозначено, интерес к проблемам Бесконечности и Движения явился главным двигателем основной части научных исследований (а также концепции и методологии их организации), по результатам которых написана эта книга. Само понятие Бесконечности заслуживает особого внимания. По отношению к нему человечество всегда занимало и до сих пор занимает две диаметрально противоположные позиции, утверждая в лице одних своих представителей, что Мир ограничен, конечен, в лице других, напротив, что Мир бесконечен. Авторы, придерживаясь последней гипотезы, собрали в данной книге результаты теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в основном под влиянием двух организующих гипотез – объективной реальности Бесконечности и гипотезы о наличии у Движения структуры.

Тема Бесконечности общепризнанно считается темой особого рода, т.к. собственно в самой ее идее содержится качество, родственное духовной сфере человека. Следует признать, что в наших исследованиях эта тема разрабатывалась под доминирующим влиянием математических и философских работ немецкого математика Г. Кантора (1845-1918) (которые он непосредственно посвятил исследованиям проблемы **актуальной бесконечности),** а также всех тех работ известного русского философа А.Ф. Лосева(1893-1980), так или иначе касающихся интерпретации актуальной бесконечности.

Сколь притягательна тема Бесконечности сама по себе, как предмет познания, как предмет интереса человека, в том числе к «невидимым» глубинам своей собственной природы, столь вместе с тем и необычна, неудобна и, даже, как всем казалось, вообще **недоступна** человеческому разуму. К началу 19-го века в связи с понятием бесконечности накопилось огромное количество различных антиномий и парадоксов, в совокупности создававших обобщённое впечатление, называемое "ужасом бесконечности" (horor infiniti (лат.)).

Тем не менее, вопреки такому положению вещей Г. Кантором, была все-таки предпринята разработка этой уникальной и весьма трудной во всех отношениях проблемы. Разумеется, она проводилась вопреки, если можно так выразиться, *всему*. Кантор имел дерзновение считать, что понятие Бесконечности открывает более совершенные средства познания Творца и сотворенного Им Мира, и что оно не есть недоразумение и парадокс, как это и ранее и в его время всем казалось, но доступно не только Духу, интуиции человека, но и его Разуму, доступно непротиворечивому мышлению. В разработке средств познания, позволяющих оперировать этим необычным понятием, он видел выполнение некоей своей миссии перед Богом и человечеством[2]. Кстати, именно это обстоятельство, с нашей точки зрения, и явилось источником того вдохновения, которое позволило ему с невиданным упорством преодолевать огромное количество трудностей, встретившихся ему на этом пути.

В своих работах он показал, что, несмотря на удивительные, и кажущиеся поначалу противоречащими здравому смыслу, свойства актуальной бесконечности вполне возможно

[2] В.Н. Катасонов Боровшийся с бесконечным М., Мартис, 1999

исследовать средствами формально-логического мышления. Исследуя их математическими методами, Г. Кантор укрепил себя еще более во мнении, что **актуальная бесконечность** является понятием не менее естественным для человека, чем те, которые он заимствует из относительной и ограниченной сферы своего земного опыта, относя их к явлениям конечным, финитным.

Различая содержащиеся в Числе три такие идеи (см. рис. 1), как Конечное, Трансфинитное (актуально бесконечное) и Абсолютное, Кантор считал, что Абсолютное непостижимо. Оно является атрибутом самого Творца, и непознаваемо ни в каких рационально-логических определениях, схемах или символах. Напротив, для познания Сотворенного Мира он считал вполне уместным введение в обиход науки понятий о трансфинитном, для операций с которыми он разработал соответствующие символы и теорию[3].

Сам Кантор, конечно, стремился увидеть созданные им трансфинитные (сверхконечные) числа, используемыми в различных естественнонаучных интерпретациях: в прикладной математике, физике, биологии, психологии, и прикладывал к этому всю мощь своего таланта и опыта.

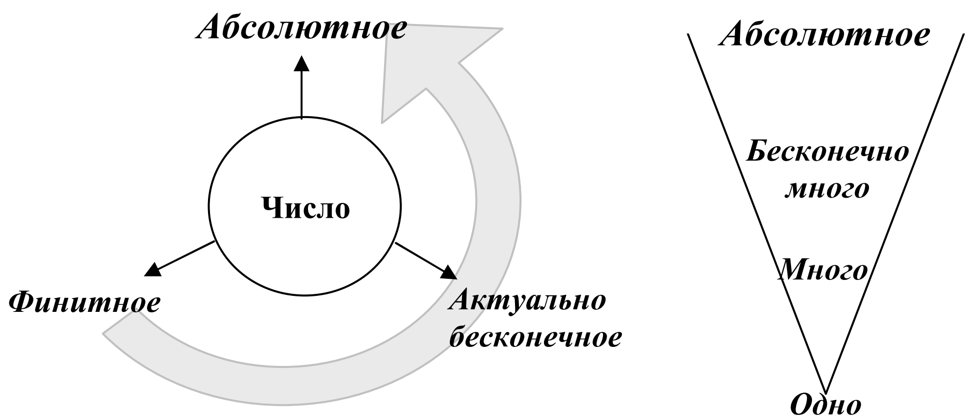


Рис. 1. Типы *многого*, заключенного в идее Числа

Однако, несмотря на это, бесконечность с его помощью не сошла с Неба на Землю непосредственно, как бы он хотел это видеть, и не обнаружила себя во всей полноте возможных интерпретаций, принадлежащих ко всем видам реальности. Его усилиями она была введена только в сознание (в понятие, in Abstracto), и так осталась вне пределов интерпретации, вне пределов прикладного использования до сего времени. Следующие после Кантора поколения математиков потратили свои усилия лишь только на исследование строгости и непротиворечивости логических структур созданной им теории множеств, ее формально-логической состоятельности, и крайне редко затрагивали проблемы ее интерпретации[4]. Мир физики был еще дальше от интерпретации бесконечности, чем мир математики. У бесконечного не было реального онтологического существования. Бесконечность была не физична.

Прошло сто лет. Вопросы интерпретации актуальной бесконечности так и остались открытыми и до сего времени. Первые результаты, имеющие, с нашей точки зрения, прямое отношение к проблеме интерпретации **актуальной бесконечности,** были получены в 70-е годы теперь уже прошлого 20 века. Они появились в результате поиска связи между трансфинитными числами и обычными конечными числами. Оказалось, что такая связь существует, но существует не в прямом виде, а опосредованно, и этим посредником между финитной и трансфинитной областями является самое обычное **арифметическое действие**[5].

---

[3] В последующие времена (имеется ввиду беспримерное дерзновение Г. Кантора в богословско-религиозных толкованиях актуальной бесконечности) стали говорить по *известной аналогии* о созданной им шкале трансфинитных чисел, как о своеобразной «интеллектуальной лестнице» на Небо.

[4] Мир физики отстоит от интерпретации актуальной бесконечности еще дальше, чем мир математики. В результате у бесконечности, как у абстрактного понятия, не было реального бытийного существования. Она рассматривалась лишь как некое абстрактное числовое свойство, но не как самостоятельный объект. В этом смысле бесконечность осталась до сих пор не «физичной».

[5] Под *действием* мы понимаем *способ (прием) преобразования сущности Числа* (подробнее это понятие обсуждается позднее).

Было установлено, что *всякому прямому арифметическому действию, такому как сложение, умножение, возведение в степень и сверхстепень, - в бесконечной сфере можно поставить во взаимнооднозначное соответствие образ, названный нами* ***трансфинитным образом финитного действия или сокращенно - трансфинодом.***

Трансфинод является своеобразной количественно-трансфинитной характеристикой одного вполне определенного свойства всякого арифметического действия - а именно, способности порождать новые в **качественном** отношении числа. Конкретно это порождение осуществляется при переходе от прямого действия к взаимно ему обратному, требующему, как известно, такого расширения. И чем выше на трансфинитной лестнице стоит трансфинитный образ прямого действия, тем большие в самом действии скрыты внутренние потенции к образованию чисел **новых качеств**, которые непосредственно реализуются, как мы знаем, через действия обратные. Так на сложении и вычитании, как на действиях первой ступени, появляются (вводятся) *отрицательные* числа, на умножении и делении –действиях второй ступени - появляются *рациональные* числа, а на возведении в степень, извлечении корня и логарифмировании –третьей ступени -появляются *действительные и мнимые* числа (см. табл. 1).

Исследование связи между величиной трансфинитного числа, как образе финитного действия, и порождаемых теми же действиями качественно новых чисел, позволило сформулировать две рабочих гипотезы относительно природы актуальной бесконечности:

1. Наличие шкалы трансфинитных чисел, простирающейся в Абсолютное, указывает на параллельное существование соответствующей ей **шкалы (тоже бесконечной) действий над финитными числами**, у которой на сегодня известны только первые ее четыре члена – известные нам прямые арифметические действия: сложение, умножение, возведение в степень и возведение в сверхстепень [9, 10, 15] (см. табл. 1).
2. В объективном толковании **трансфинитные числа** могут использоваться для моделирования **качественных переходов, качественных трансформаций**, которыми изобилует любой вид действительности, а при интерпретации явлений физической природы могут являться ***мерой*** **качественных различий вещей и их качественных трансформаций**;

Некоторые математические понятия в свете обобщения сложения. Таблица 1.

Ступени обобщения сложения	I	II	III	IV	V	…
Числовое множество, на котором исходно замкнута прямая операция	$a+b$ *натуральный ряд*	$a \cdot b$ *натуральный ряд*	a^{b} *натуральный ряд*	${}^{b}a = a \underset{\rightarrow}{4} b$ - *слабая сверхстепень* ${}^{b}_{\bullet}a = a \underset{\rightarrow}{4} b$ - сильная сверхстепень	?	…
Обратная операция	$a - b$	$a : b$	$\sqrt[b]{a}$; $\log_{b}^{a}$			…
Расширенное числовое множество, делающее обратную операцию замкнутой	*целые числа*	*рациональные числа*	*действительные и комплексные числа*	?	?	…
Противоположности в качественной определенности чисел, возникающие на данной ступени	*положительное -отрицательное*	*целое -дробное (целое-часть)*	*действительное-мнимое ; рациональное-иррациональное*	?	?	…

Имея ввиду указанные обстоятельства, мы подошли к необходимости (в связи с проблемой интерпретации актуальной бесконечности прежде всего) существенно расширить класса арифметических действий и создать для этой цели специальное их исчисление, базирующееся на отображении шкалы действий в трансфинитную область. После этого, исследование трансфинитных образов обычных арифметических действий позволило разобраться в схемах построения шкал действий и разработать алгоритмы получения бесконечного их множества (см. табл. 2). При этом действием *начальным, базовым* в этом бесконечном множестве, т.е. в неограниченном натуральном их ряде, явилось хорошо знакомое нам – *сложение*.

Последующее изучение этого вопроса показало также, что аналогичные ряды действий можно построить практически от любого другого арифметического действия, выбранного в качестве *базового*. Им может быть, в том числе, например, всякое обратное или даже какое-либо иное искусственно введенное действие. В математическом отношении всякий такой ряд действий будет также вполне «состоятельным» и доступным дальнейшему изучению и последующему практическому применению. Исследование этих вопросов составило содержание алгебраической части математической работы, включенной в состав данной книги в Приложении 1 под названием «Введение в исчисление действий» (ИД).

Отметим, что разработка «исчисления» потребовала пересмотра целого ряда «рабочих» понятий арифметики, и, прежде всего, затронула такие основные понятия как **действие и число**. В обычной практике познания для всякого предмета, как известно, различают его сущность и явление. То же самое, но уже целенаправленно, пришлось сделать и в «Исчислении действий», т.е. использовать в его разработке принципы, основывающихся на этом различении, и относящихся, прежде всего, к действию и числу. К определениям понятий *число и действие* можно подойти двояко, т.е. намеренно строя их определения, опираясь либо на сущностные, либо на феноменологические моменты смысла, содержащихся в этих понятиях.

Принципиальное использование этой разницы по отношению к числу и действию является весьма важным. Как сущность всякое финитное число есть всегда некое единое, неделимое и, самое главное, **единственное** в смысловом отношении образование. Однако в явлении оно может быть размножено, т.е. многократно явлено, сохраняя при этом неизменной эту свою единственную изначальную родовую сущность. Спрашивается, а в теории хорошо известных бинарных действий, к которым так привыкли, с чем именно оперируют: с сущностью числа, или с его явлением? Разумеется и с тем с другим, но в разных случаях в разной мере. И при построении предпринятого нами исчисления действий (ИД) эта мера должна быть строго оговоренной, а при необходимости и формализованной. Введение подобного рода разграничения относительно определений действий и чисел является чрезвычайно важным моментом, и в совокупности с некоторыми другими моментами, используемыми нами в «Исчислении действий», позволило выстроить «Исчисление» в некоторую завершенную, конструктивную форму. А самое главное вводить в рассмотрение и получить возможность оперировать расширенными рядами действий и определять с их помощью качественно новые числа и многие другие математические объекты.

Кроме того, на основе разработанной методологии, подробно обсуждаемой во второй части «Исчисления действий», приведено краткое описание результатов исследований свойств новых, обобщенных определений производной и интеграла. Это обобщение оказалось возможным благодаря появившемуся в нашем арсенале большому количеству вновь полученных нами новых действий, а также благодаря обобщению понятия производной, исходя из которого, производная видится в более универсальном виде - средством количественного выражения *соразмерности* между изменениями аргумента и функции. Как оказалось, такие определения можно вводить не единственным способом. Определение, предложенное И. Ньютоном и Г. Лейбницем и традиционно используемое в современном анализе, - это только одно из них.

В частности, на первых шагах таких построений были получены новые, *мультипликативные*, определения производной и интеграла, более адекватные в своей сущности не аддитивным, материально-энергетическим явлениям и процессам, а информационно-вероятностным – мультипликативным по своей природе. На наш взгляд, это открывает новые возможности для изучения информационных процессов, и, как выяснилось дополнительно, также и интерференционно-волновых. Оно оказалось пригодным для решения так называемой фазовой проблемы, которая чрезвычайно важна в исследованиях особенностей поведения больших ансамблей осцилляторов.

Таблица 2.

		Ступени обобщения сложения				
	Сопряженные понятия	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**
АЛГЕБРА	***Названия прямых действий***	**сложение**	**умножение**	**возведение в степень**	**сверхстепень**	**…**
	Стандартное и нестандартное обозначение прямых действий	$a+b=a\,\underline{1}\,b$	$a\cdot b=a\,\underline{\underline{2}}\,b$	$a^{b}=a\,\underline{\underline{\underline{3}}}\,b$	${}^{b}a=a\,\underset{\rightarrow}{\underline{4}}\,b$ - *слабая* ${}^{\overset{b}{\bullet}}a=a\,\underset{\rightarrow}{\underline{4}}\,b$ - сильная	**…**
	Интерпретации качественных противоположностей чисел	Моделирование положительных и отрицательных величин	Целое-Дробное	Действительное-мнимое Рационалное-иррациональное	**?**	**…**
	Мощности множеств U_p и U_o	Бесконечная счетная $\overline{\overline{N}}=a$	Бесконечная счетная мощность $\overline{\overline{R}}=a$	Бесконечная мощность континуума $\overline{\overline{Q}}=\overline{\overline{C}}=c$	**?**	
	Элементарные алгебраические функции	Y(x)=x+c	Y(x)=a·x+c; Y(x)=a/x	$Y(x)=x^{n}$; Y(x)=exp(x); Y(x)=log(x)	**?**	
	Объекты абстрактной алгебры	Группа	Кольцо, поле	Кольцо, поле	**?**	
АНАЛИЗ	**<u>Производная</u> (использование действий в алгебраической структуре определения)**	приращения аргумента: $x_2=x_1+\Delta x$ определение приращения функции: $\Delta y=y(x+\Delta x)+y(x)$	*Соотнесение Приращений функции и аргумента: ΔY / ΔX*	**?**	**?**	
	<u>Интегрирование</u> (использование действий в алгебраической структуре определения)	Суммирование элементарных произведений: $\sum_{i=1}^{\infty} y(x_i)\cdot\Delta x$	*Определение элементарного произведения:* $\Delta Y(x_i)\cdot\Delta x$	**?**	**?**	
	<u>Ряды</u> (использование действий в алгебраической структуре определения)	**Суммирование** произведений в определении степенного ряда $\boldsymbol{\Sigma}\, cx^{i}$	Задание **произведения** в определении степенного ряда $c{*}x^{i}$	Задание **степени** в определении степенного ряда $c\cdot\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$	**?**	

Таким образом, в упомянутой нами первой теме данной книги отрабатывались вопросы, связанные с методологией и математической базой наших исследований, необходимых для дальнейшего их использования в таких важнейших прикладных областях как синтез музыки, анализ структур речи (в частности формант русского и английского языков), анализ биоритмов человека, почвы и др. биологических объектов. Этот второй более практический аспект нашей деятельности затрагивает непосредственно другую тему данной книги - тему Гармонии.

Принцип Гармонии и парадигма современной науки

В своем первоначальном виде проблема гармонии разрабатывалась нами с использованием достижений в области гармонии, прежде всего, музыкальной. Однако непродолжительное движение в этом направлении показало, что по законам гармонии создан, по-видимому, не только человек, способный воспринимать высокоорганизованный феномен музыкальных звуков, но и весь окружающий нас мир. Через отношения *соразмерности* везде просматриваются одни и те же гармонические инварианты, характерные, как нам первоначально казалось, только для музыки. Вероятнее всего, они применимы в равной мере и для выражения *соразмерностей* пространственных форм, выражения инвариантных соотношений широкого класса материально-энергерических процессов, взятых, к примеру, из микро - или мегамира.

Все это постепенно утверждало нас во мнении, что понятие гармонии претендует занять равное место в одном ряду с такими фундаментальными категориями, как число, движение, качество, количество и прочее. Оно является весьма удобным понятийным средством для разработки тех научных парадигм, в которых их авторы стремятся видеть мир не столько как «борьбу» противоположностей, а, прежде всего, как их гармонию, в высочайшем порядке их организации, совершенства и красоты[6].

Понятие Гармония является весьма древним. Уже в VI веке до Р.Х. Пифагор, как гласит предание, после 22-летнего периода обучения тайным знаниям в египетских пирамидах становится посвященным жрецом именно Гармонии.

Представители и последователи его школы поражали и поражают до сих пор своими высказываниями по различным отраслям знания (в том числе и по проблеме гармонии) точностью, меткостью, глубиной и лаконичностью. В частности, по вопросу о структурах музыкальных вибраций, как о своеобразном голосе Вечности, они говорили, что порядок, из которого возникает стройность, соразмерность, благозвучие задается с помощью малых чисел натурального ряда.

Обманчиво подкупающая простота этого принципа подвигла нас с использованием современной компьютерной техники в достаточно короткие сроки смоделировать соответствующие ему структуры звуковых вибраций. Результаты этих экспериментов с первых же шагов показали, что для создания живой, пластичной и красивой структуры звука выполнения одних только этих соотношений явно недостаточно. Впоследствии понадобилось провести дополнительно большое количество экспериментов и даже разработать отдельные элементы соответствующей теории, чтобы добиться указанного благозвучия. Дело в том, что в предложенном и упорядоченном указанным Пифагором способом частотном пространстве, где в каждой октаве имеется только 7 звуковысотных ступеней, создание выразительного звукообраза вообще не возможно. Созданию богатых и выразительных звуковых шкал, должна была предшествовать разработка теории *темперированных* частотных структур, в которых в октаве должно быть, по крайней мере, не менее 1000 ступеней.

Исторически создание очередной «лестницы на Небо», а именно в музыкальных шкалах, началось, как мы уже говорили, со времен Пифагора в VI веке до Р.Х. (а у арабов, по данным Г. Римана [9, 10, 15], еще раньше - в X веке до Р.Х.);

---

[6] Полагая, что мир трансфинитного, бесконечного – это реальный физический мир, а не только область математических абстракций, то гармонию в одном из своих аспектов можно понимать как принцип существования трансфинитного в финитном, ограниченном мире. В этом отношении бесконечное предстает перед нами в образе «неуловимого» целого, т.е. такого *качества* системы, которое несводимо к простой сумме ее частей и не выводимо из нее. Через гармонию движения частей в целом, через их соразмерность это целое сохраняет устойчивость и существует в нашем 3-х мерном мире.

Пифагор разработал звуковую шкалу с 7 ступенями в октаве (см. табл. 3), арабы использовали уже 17-ступенную гамму, но, делали это, больше интуитивно, без привлечения к расчету ее структуры соответствующих математических средств. С разрывом в 23 века в работах целого ряда музыкантов-теоретиков средних веков Италии, Германии, Франции, таких как Д. Царлино, Н. Меркатор, Францелин, А. Веркмайстер и др. появляются музыкальные шкалы с 19, 22, 29, 41, 53 ступенями в октаве. (В конце 20 века Танакой и Бозанкетом был даже построен орган с 53 клавишами в октаве.)

С нашей точки зрения это явилось кульминацией, завершающей этап в развитии культуры конструирования и изготовления музыкальных инструментов, условно называемой нами эпохой *механических музыкальных инструментов*. С начала 20 века в связи с появлением электричества начинается новый этап в развитии средств музыкальной выразительности - появляются электронные музыкальные инструменты. В 1960 году Е. Мурзин (1916-1970) создает первый в мире электронно-оптический синтезатор звука с 72-ступенной системой темперации. Затем чуть позже во Франции Я. Ксенакис разрабатывает компьютерный аналог этой системы.

Мы живем в мире, заполненном вибрациями, колебаниями, суть которых движение по кругу. Этот факт заслуживает особого внимания, т.к. именно движение по кругу, т.е. движение замкнутое на себя, соединяет в себе практически все фундаментальные противоположности: движение и покой, дискретность и непрерывность, изменение и неизменность, конечность и бесконечность, ограниченность и безграничность, определенность и неопределенность, и выстраивает в этом самозамкнутом движении Гармонию для перечисленных противоположностей.

Разум человека вместе с системой чувственного восприятия можно рассматривать, как тончайший инструмент оценки степени гармоничности или дисгармоничности тех явлений, *образы* которых человек воспринимает извне, и которые создает сам в процессе творческой или рутинной деятельности[7].

Отсюда становится понятной одна из особенностей работы мозга человека – *способность оценивать гармонию или дисгармонию* того или иного явления именно на основе *восприятия и анализа вибраций*, исходящих от наблюдаемого предмета. Если, кроме того, понимать трехмерные формы реальных предметов, как некий завершившийся волновой или переходный (с достаточно большим периодом повторения) процесс, то все три феномена восприятия (звука, цвета и формы) можно рассматривать в едином ракурсе обобщения.

Можно также допустить, что целевым назначением и сенсорной (воспринимающей) и разумной (анализирующей) составляющих аппарата восприятия человека является самосохранение и творческое самовыражение (труд, искусство и т.д.) с достижением максимальной *определенности* в знаниях об окружающей среде.

Достижение такой ***определенности*** *при восприятии и последующем анализе поступающих извне вибраций требует соответствующего разграничения и дискретизации* ***непрерывности*** *частотного спектра, приходящих извне колебаний, (т.е. “непрерывность должна быть разорвана и градуирована”* [*Ле Корбюзье «Модулер» - М., 1967*])[8].

Для пояснения ситуации, возникшей с изучением аппарата восприятия и анализа сенсорных систем зрения и слуха человека уместно провести аналогию между ними, сопоставляя фазы развития представлений об их особенностях в течение достаточно длительных исторических промежутков времени (см. табл. 4).

---

[7] Слово «образ» именно в русском языке наиболее точно отражает сущность этого понятия, направленного на выражение Гармонии, красоты и совершенство чего-либо воспринимаемого извне (слово «безобразный», как противоположное по смыслу, в нашем языке с очевидностью означает отсутствие образа или красоты).

[8] Кстати, аналогичные требования предъявляются и при “создании” знакоязыкового описания явлений. “Явление все еще остается непередаваемым в записи, если оно заранее не разложено и не измерено”[Корбюзье]. А то именно, как производится разложение на части, т.е. как производится измерение (т.е. до какой степени совершенна измерительная модель) и определяет гибкость и выразительность соответствующего языка.

Звуковысотные шкалы в музыке Табл. 3

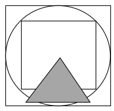
Количество нот в октаве	*Кем открыта или реализована*
7	**Пифагор** 6в. до РХ.
12	**А. Веркмайстер** (1645-1706) Расчет и реализация. **И.С. Бах** (1685-1750) в 1722 г написал в этой системе целый ряд произведений, продемонстрировав ее выразительные возможности.
17	**Древняя система арабов**. Известна ранее 10в. до РХ. **А.С. Оголевец** (1941) Использовал эту систему в своих теоретико-музыкальных построениях.
19	**Итальянская система эпохи возрождения**. **Д. Царлино** (1517-1590) **Л. Фольяни** (-1539) **М. Преториус** (1619)
20	**Г.Б. Дони (**1635)
21	**П. Барановский Е. Юцевич** (1956)
22	**Древняя индийская система «Шрути».**
24	**Н.Г. Нейдгарт** (1718) **А. Араамов , Г. Римский-Корсаков** (1920 г) **J. Dinnan и др**.USA патент EP 0 436 976 A1.(1989) Версия 22 ступенной равномерной темперации.
26	**М. Мерсенн** (1636)
29	**А. Оголевец** (1941)
31	**Н. Вичентино** (1546) **М. Мерсенн** (1636) **Г. Гельмгольц** (1821-1894)
36	**Г.А. Аппун, Энгель**
41	**П. Томпсон** (1863)
53	**Н. Меркатор** (1725) Предложил теоретически. **Р. Бозанкет**(1825) **И. Танака** (1890) Создание органа с двумя мануалами.
72 !	**Е.А. Мурзин** Разработал и реализовал в электронно-оптическом синтезаторе АНС (1960) **Я. Ксенакис** Реализовал в компьютерно-графическом синтезаторе UPIC (1980)
84	**Д.К. Гузенко (1962)**
1771	**К. Сараджев** (в 1930-е г) Упоминается Сараджевым в теоретической концепции «Музыка-колокол». Использовалась им в музыкальных композициях для колоколов.
…	**???**

Из примеров, приведенных в табл. 4 видно, что в своем развитии известной полноты и завершенности достигла только модель звуковосприятия, выразившаяся в создании дискретных музыкальных шкал. Это положило начало возникновению в XVIII в. универсального музыкального языка, приведшего в последующих веках буквально к взрывному характеру развития средств самовыражения “человеческого духа” в звуках.

С созданием дискретных шкал, моделирующих системы восприятия пространственных форм и цвета, ситуация оказалась сложнее. Это связано с традиционно общепринятым допущением, что звук одномерен, в то время, как и цвет и пространственные формы реальных предметов существенно трехмерны, и имеют по отношению к одномерным объектам качественно иную топологию.

Проблема создания совершенных антропоморфно-адекватных измерительных шкал и соответствующих универсальных языков для систем восприятия цвета и пространственных форм в настоящее время не решена. Процесс создания соответствующих дискретно - антропоморфных систем остановился, несмотря на создание абстрактных (физических) измерительных систем, давших значительный импульс развитию науки и техники, обслуживающих утилитарные жизненные запросы человека, а эстетические только косвенно.

Фазы развития моделей различных систем чувственного восприятия Таблица 4.

Фазы развития	***Слух***	***Зрение (система восприятия пространственно - геометрическое форм)***	***Зрение (система цветовосприятия)***
1. Создание простейших шкал (*1-я ступень дискретного приближения непрерывности*)	*Пифагор (VI в. до РХ)* Дискретизация звуковысотной шкалы на 7 ступеней //Появился алфавит будущего музыкального языка, начало записи музыки, накопление опыта сочинения музыкальных композиций//	*Египет (пирамиды) (X в. до РХ)* *Пифагор (VI в. до РХ)*  Разработаны основы геометрического пропорционирования	*И. Ньютон (XVII в.)* Семиступенное разбиение цветовой шкалы *Г.Гельмгольц (XIX в.)* Разработка трехцветной теории цветного зрения
2. Создание количественно определенных мерных шкал	*Л. Эйлер; Г. Гельмгольц (XVIII -XIX в.)* Выполнено описание дискретного звукоряда как геометрической прогрессии со знаменателем $2^{\frac{1}{12}}$. *О. Фурье* Разработан метод разложения периодических изменений в виде суммы элементарных циклических изменений	*Новгород (XIII- XIV в.)* Двумерный 2D вариант антропоморфного пропорционирования архитектурных сооружений *Модулер -L. Korbusie (XX в.)* Разработка антропоморфной шкалы пропорционирования с использованием чисел Фибоначчи и пропорций тела человека	*Ф.Рунге (XIXв.)* Создание системы цветовой палитры (*6 цветов и несколько октав”*)
3. Антропоморфная настройка (коррекция) мерных шкал (*2-я ступень дискретного приближения непрерывности*).	*Д. Царлино, А. Веркмайстер (XVIII в.)* Разработка 12-ступенной темперации октавы //Сформирован универсальный музыкальный язык, начали развиваться теории гармонии, оркестровая и хоровая музыка, возник универсальный музыкальный язык//	*Трехмерный 3D вариант антропоморфно настроенных шкал отсутствует*	*Темперированная антопоморфная цветопалитра отсутствует*

Однако, бурное развитие новейших информационных технологий (кино, телевидения и компьютерных технологий в особенности), вновь выдвигает на передний план необходимость создания совершенных (т.е. настроенных на гармонию системы восприятия человека) градаций, чтобы правильно разграничивать бесконечные возможности непрерывных шкал, переводя их в дискретные[9].

В методах получения знаний современной цивилизации заметно доминируют процессы дифференциации. Интенсивная реализация подобного подхода в течение примерно двух последних веков привела к возникновению нового, небывалого по своим масштабам Вавилона, Вавилона научного, а еще правильнее Вавилона интеллектуального, со своим характерным "смешением языков". Принцип Гармонии противостоит подобного рода подходам, хотя при первом рассмотрении требует разделения, необходимого для подготовки исходного «строительного» материала для изучения и последующего синтеза.

Что нам известно о законах действия сил внутреннего человека? Пока что очень мало. Очевидно только одно, что вторжение в область действия этих сил уже началось, а чем оно закончится - зависит от очень многих факторов. Ясно только одно, что в изобилии накопленные знания о закономерностях сил и энергий, действующих в физическом мире, мало пригодны для изучения этого нового неведомого мира внутреннего человека[10].

Применительно к этому случаю принцип Гармонии крайне необходим, как наиболее адекватный для получения соответствующих знаний и применения их для сохранения от разрушения внутреннего мира человека.

Отрыв человека от реальности, созданной, как мы полагаем, по законам Гармонии, и «отправка человека в «миры Иные», искусственные или виртуальные, создаваемые пока что по законам весьма ограниченных знаний внутреннего мира человека, несомненно чреваты самыми серьёзными последствиями, как для психического здоровья человека, так и для его потомства. Поэтому концепции формирования виртуальной реальности и любых вообще информационных технологий должны опираться на возможно более полное знание законов Гармонии, касающихся как внешнего, так и внутреннего Мира Человека.

---

[9] (Прикладной выход исследований в русле указанных проблем чрезвычайно широк: техника, биология, архитектура, кино, стереотелевидение, дизайн, компьютерная графика и др., в особенности касается компьютерных информационных технологий.)

[10] Проводимые в настоящее время всевозможные "взвешивания" мыслей и души есть не более, чем грубое недомыслие со стороны некоторых современных ученых. Как говорится, прямые аналогии, скорее всего, здесь неуместны. Более того - законы мышления, переработки информации, деятельности разума, чаще всего именно прямо противоположны законам физического мира.

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В ИСЧИСЛЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

1.1 Финитная нумерация действий

1.Концепция нумерации действий

Парадокс окончательно установленный ныне состоит в том, что именно предельные абстракции являются истинным оружием, которое правит нашим осмыслением конкретного факта.

А.Н. Уайтхед [23]

Действие и число

Современная наука убедительно показывает, что понятие Числа является фундаментальным понятием, и в интерпретациях соотносится практически со всеми известными видами реальности. Глубокая связь понятия Числа с многообразными проявлениями в окружающем нас мире видится в общности их сущностей, которую можно было бы выразить понятием **единораздельность**. Кроме того, единораздельность как принцип, необходим для разработки и такого понятия как Гармония, (т.е. глубоко дифференцированной и совершенной единораздельности), которое вне понятия порядка, задаваемого с помощью Числа, вообще немыслимо. Именно по этой причине, на наш взгляд, Число обнаруживается всегда рядом с порядком, соразмерностью и красотой.

Число справедливо относится к *самым абстрактным понятиям*. Это убедительно показано в работах Плотина, Кантора и Лосева и др. авторов. Знакомство с их работами как будто бы показывает, что деятельностью разума проникнуть выше (или глубже) Числа уже невозможно, Число – это предел абстрактных построений. Однако думать так было бы, на наш взгляд, ошибкой. В понятийном аппарате математики существует понятие, которое можно смело поставить или выше числа, или, по крайней мере, рядом с ним - им является **действие над числом**. Именно **действие** (или операция над числом) является носителем одновременно и принципов (способов) порождения чисел и принципов любых их качественных или количественных трансформаций. Поясним сказанное некоторыми примерами.

Из всех чисел, которыми оперирует человек, непосредственно данными, первичными, как бы экзистенциально сущими можно считать, пожалуй, *только малые числа натурального ряда в пределах одного десятка*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7… . Все остальные так или иначе и определяются и формализуются через тот или иной (осознаваемый, а иногда и не осознаваемый) конкретный *способ их порождения*, называемый *арифметическим действием (или арифметической операцией)*.

Пример 1. ***Большие* натуральные числа.** Всякое большое натуральное число N (в отличие от малых чисел) более удобно и определяется и воспринимается, как некое *малое* **n**, к которому многократно **прибавляют 1**. Этот простой пример показывает, как мы видим, обнаруживает необходимость при определении того или иного достаточно большого числа использования *действия* «прибавления»).

Пример 2. ***Большое* число N= 10^{10}**, записанное в таком виде, с очевидностью требует для своего и определения и формального представления *операции* возведения в степень.

Пример 3. **Минус единица «-1»** – является числом вообще нового качества по отношению к любому натуральному положительному числу.

Это становится вполне очевидным, если в записи числа «–1» заметить сокращенный вариант более полной записи с использованием действия вычитания вида «0-1».

Пример 4. Любое **рациональное число** вида m/n есть прямое порождение *операции* деления.

Пример 5. **Мнимая единица i=** $\sqrt{0-1}$ определяется и оформляется уже не с помощью одного, а *двух действий*: вычитания и корня.

Пример 6. **Иррациональное число** $\sqrt{2}$ по определению порождается *операцией* корня.

Пример 7. **Трансцендентное число e (**e - основание натуральных логарифмов**)** для своего определения требует бесконечного ряда сразу *трех действий*:

$$e=1+(1/2!)+(1/3!)+(1/4!)+(1/5!)+\ldots$$

Эти примеры, иллюстрируют, во-первых, глубокую связь *числа и действия над числом*, и, во-вторых, подчеркивают именно *порождающую* способность действия в отношении числа.

Как известно, последовательное обобщение сложения и переходы к действиям более высоких ступеней активизировали в свое время процесс развития практически всех понятий математики в том числе и основных (см. табл. 1 , Гл.2). Более конкретно можно сказать, что это приводило к следующей трансформации понятийных средств самой математики:

- введению обратных операций и на их основе к расширениям понятия числа;
- скачкам мощности числовых множеств от счетного к континууму;
- получению класса алгебраических операций и функций;
- определению алгебраической структуры определений производной и интеграла;
- получению алгебраической структуры формул степенных рядов.

Поэтому вполне естественно допустить, что, продолжая эти тенденции, можно далее получить:

- *действия не только 4-й, 5-й ступеней обобщения сложения, но и всего их натурального ряда;*
- *дальнейшие расширения понятия числа;*
- *новые (в частности, мультипликативные) определения скорости и интеграла;*
- *новые определения рядов;*
- *новые действия для преобразований трансфинитных чисел.*

В разработанном нами «Исчисление действий» (ИД) (см. Приложение 1.) эта идея последовательно реализуется. В нем вводятся и исследуются, в том числе свойства таких ранее неизвестных математических объектов, как:

- **действия отрицательных ступеней;**
- **ряды действий, начинающихся не только от сложения, но и от некоторых иных произвольных начальных, базовых действий.**

Вполне понятно, что создание ИД потребовало, не только переработки и уточнения основных понятий алгебры и арифметики, но также введения и некоторых новых. Прежде всего, конечно, потребовалось дать ответы на следующие вопросы:

- что есть действие и, в частности, бинарное действие на более высокой ступени обобщения этого понятия?
- каковы разновидности действий над числами, которые в связи с целями разработки именно ИД следовало бы особо выделить и в дальнейшем различать?
- каким должен быть минимальный набор операторов над действиями, т. е. операторов метауровня, обеспечивающих «оперативный» простор в создании достаточно полной и вместе с тем относительно замкнутой структуры всего *исчисления* в целом?

Смысловые моменты понятия числа

Первые и весьма глубокие знания о природе числа были известны древним (свидетельство тому – глубочайший трактат о **числе** Плотина (204-270г) [24]). Еще раньше Пифагором было подмечено непреходящее значение глубинной сущности чисел, их всепроникающую способность к интерпретациям (моделированию), их таинственную связь с началами жизни.

Монопольное владение числом принадлежит математике. Как область человеческого познания, она идет своим особым путем. Её главная опора и движущие силы, на наш взгляд, смещены в область человеческого духа, направляющего познавательную деятельность разума.

Свобода человеческого духа в этом смысле является гарантом внутренней свободы математики. Исследователи глубин смыслового океана, как известно, никогда не достигали ни его дна, ни ограничивающих берегов, но, напротив, чем дальше в него заходили, тем решительнее обнаруживали бездонность его содержания.

Смысловое пространство нашего сознания названо *океаном*, не имеющим ни пределов, ни очертаний, и фактически *бездонным*, не случайно. В нём реально присутствуют отнюдь не только логичное, упорядоченное, устойчивое и гармоничное, как может показаться с первого взгляда, но в нем же обнаруживает себя и бездна темного, случайного, алогичного и иррационального. Особенность математики, как науки, и состоит именно в том, чтобы, преодолевая хаос, создавать, развивать и хранить предельно точные и определённые знания, извлекая их из указанных смысловых стихий. Осуществление такого намерения, т.е. создание и удержание устойчивых и универсальных знаний, вообще говоря, и есть большой труд математики. Достижениями на этом пути она и снискала к себе всеобщее уважительное отношение.

Имея дело с бесконечным смысловым океаном, математика стала фактически наукой о бесконечности (Г. Вейль [12]). К концу 20 века это положение, к тому же оформилось и как некая данность: Г. Кантор (1845-1918) разработал методы исчисления актуально-бесконечных (действительно бесконечных) величин в своей фундаментальной работе по теории множеств [18]. Таким образом математики 20 века начали осуществлять научное доказательство реальности присутствия бесконечности в Мире, - того, что интуитивно чувствовали великие древние философы (Плотин, Прокл, Пифагор, Платон, Ямвлих).

Тема числа в полном объеме бесконечна. Число, как одно из самых фундаментальных понятий, или рождается вместе со смыслом вещей или даже, как считает Лосев, предшествует ему [24-27]. По этой же причине оно безгранично и в интерпретациях. Поэтому остановимся только на тех аспектах этого понятия, которые, как нам кажется, наиболее важны для обоснования «Исчисления действий» - математической части работы, представленной в Приложении 1 данной книги.

Всё, что мы наблюдаем вокруг себя, объединяет одно общее и как бы всепроникающее свойство: всё есть многое, соединенное в одно, т.к. всё имеет структуру, дискретность, внутреннюю разделенность[11].

Там, где есть разделение, там должен быть и синтез. И тогда следует выяснить, имея ввиду определение числа, - какая форма соединения многого и одного, какой тип смысловой взаимосвязи этих двух моментов порождает новое смысловое бытие, новую сущность? В своих работах Лосев показывает, что принцип организации смысла самого Числа и смысла вообще всех вещей основывается на соединении многого в одно. Число является носителем именно такой смысловой сущности в самом первозданном виде. Оно «ответственно», как показывает Лосев, за порождение вообще любого смыслового бытия, но бытия еще неразвитого, как бы первобытия, без каких-либо дополнительных признаков и отличительных моментов.

Как известно, существование чего-либо, в том числе и самого смысла, без контрастов и противопоставлений невозможно? Лосев говорит, что смысл начинается с *различия*: там, где *нет различия*, – *нет и смысла* [24]. Отсюда следует, что, если слияние многого в одно порождает всякое **бытие**, то тем же самым процессом должно одновременно порождаться его противоположность – **небытие**. Именно принцип полагания различия и позволяет воссоздавать смысл чего-либо многого. В определении самого числа элементы многого различаются по наипростейшему признаку, а именно, есть он или нет, присутствует он или отсутствует, т.е. по признаку бытия или небытия элемента.

---

[11] Не исключение, по-видимому, и область человеческого сознания. Принципиальным условием возможности мыслить какой-либо предмет является также наличие в нем внутренней разделенности. Если мы мыслим свет, то ему обязательно противопоставляем тьму, если мы мыслим движение, то с ним связываем покой и т.п. Абсолютная же однородность или тьмы, или света, или покоя или движения - немыслима. Там, где нет контрастов и переходов, возникает смысловая тьма, неразличимость предмета нашим сознанием, его смысловое отсутствие для разумного взора. «Единое, само по себе, без внутренней разделенности, недоступно ни пониманию, ни познанию» (Филолай, цит. из книги Лосева «Бытие-Имя-Космос»)

Конечно, Число порождает некое еще неразвитое смысловое бытие, а скорее воссоздает его как потенцию для последующего развития. Число является при этом еще только знаком, первым символом этого бытия, первым его смысловым зрением. Число своим смыслом являет нашему сознанию бытие единомножества, и потому число есть его первый смысловой образ (Лосев) [24]. (*Число и действие - две стороны одного процесса: число невозможно явить без действия, а действие невозможно без числа. Число в смысловом пространстве – это покой (в том смысле, что формирование смысла завершено), действие, напротив – это своеобразное движение, формирующее смысл*). Отсюда также следует и то, что действие и число есть предельно возможные и универсальные абстракции, предельно доступные глубины охвата смыслом вообще всякого мысленного бытия.

Однако, число, обнаруживая нашему сознанию бытие чего-либо, включает в свою внутреннюю структуру и его противоположность – небытие. И если мы узнаем о бытии, то мы вынуждены и обязаны познавать и небытие, которому родственны по смыслу такие понятия как тьма, неопределенность, хаос и другие многочисленные интерпретации небытия.

Поскольку число стоит у истоков явления всякого смыслового бытия, а вместе с ним и небытия, то уместно выяснить - в каком понятии осуществляется их синтез? Что есть единство противоположностей бытия и небытия, в каком понятии они проявляют себя едино? Общеизвестно, что их синтез осуществляется во всяком движении, во всяком изменении, которые обобщает категория *становления*. Именно в *становлении* бытие и небытие взаимно порождая, сменяют друг друга.

Категория движения, по известной закономерности, также предполагает свою диалектическую противоположность,– покой. Покой, как нечто постоянное и устойчивое в «пространстве» нашего сознания, и есть явление смысла.

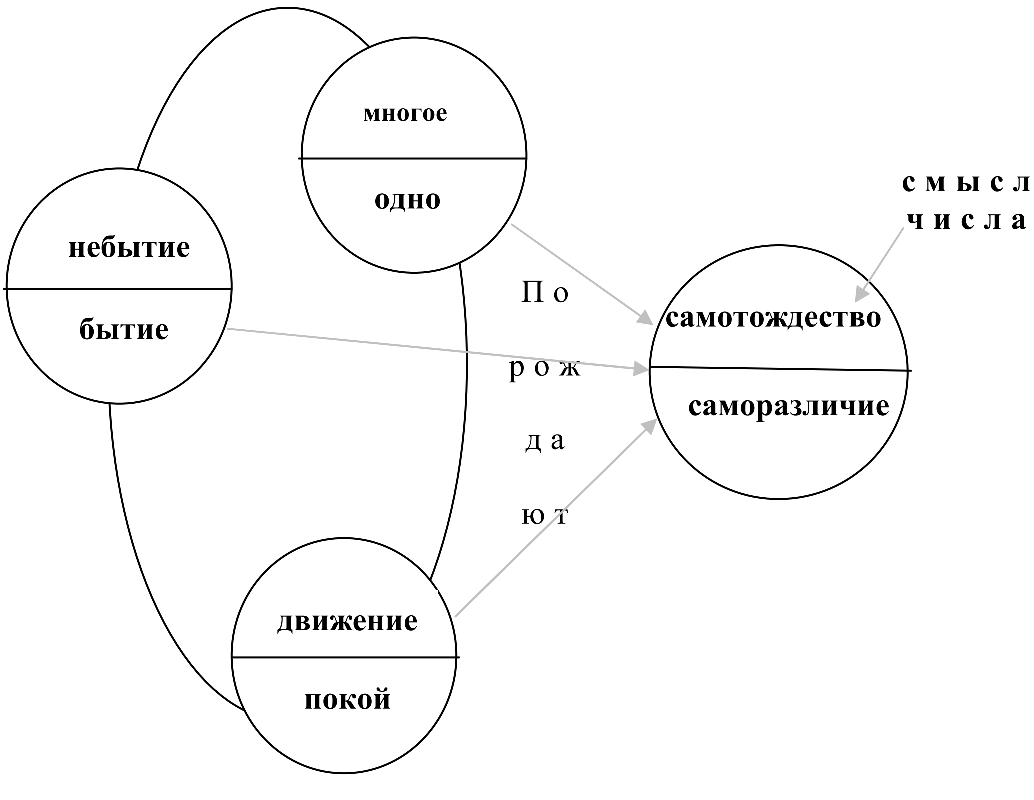


Рис. 1.1.1. Категориальные связи в определении числа.

В итоге смысловые диполи категорий «многое-одно», «бытие-небытие», «движение-покой» своей специфической соразмерностью и создают в целом всю совокупность тождеств и отличий содержимого понятия Числа, благодаря которым они и могут использоваться как инструмент познания при формировании образов тех или иных вещей, тем самым, воспроизводя их конкретный уникальный смысловой облик. Вещь при этом отделяется от всех прочих, проявляется ее индивидуальность и неповторимость. Вместе с тем обнаруживается ее тождество всему сущему и единство с ним. Начало всем этим смысловым превращениям кладет *число*.

Рассмотрение всех этих превращений позволяет увидеть рождение смысла и самого числа *в нашем сознании*, как явления динамического. Хотя, конечно, в первую очередь осознается нами его статическая, вневременная сущность (Лосев) [24]. Смысл чего-либо во времени неизменен, покоится в нашей памяти, существует как бы вне временных границ. «… *Ни в коем случае нельзя сказать, что беспредельности свойственно только движение. Беспредельности свойственно одинаково и движение, и покой, и потому мыслиться она может не сама по себе, но лишь в связи с эйдосом (смыслом), который только один и может, входя во взаимодействие с беспредельностью, одновременно и двигаться и покоиться. Итак, если к числу относиться как к умному числу и созерцать его ипостась, то выходит, что число есть нечто предшествующее каждой отдельной определенности*» [24].

Число - самотождественное различие подвижного покоя, дающее единичность, т.е. дающее смысл [24]. Почему самотождественность? Потому что, определяя число, невозможно опереться на какое-либо иное понятие, но число *само себя* оформляет, и создает тем самым свой собственный первосмысл и первоопределенность. Оно принципиально не может быть созданным извне[12].

Как мы видим, категориальная структура числа оказывается довольно сложной, состоящей из восьми категорий. И нужно, конечно, в каждом отдельном акте познания разбираться, как удержать их вместе, не умаляя достоинства каждой из них, но напротив, использовать их индивидуальность для создания бытия еще большей степени смысловой ясности. Постановка такой проблемы реальна и эта проблема и есть проблема гармонии [26]. В частности, в понятии числа можно видеть реальное применение принципа Гармонии, примиряющего все эти смысловые противоположности между собой. В свете сказанного, понятие *число есть первичная смысловая гармония* ***многого и одного***, *движения и покоя, бытия и небытия*. Их единство в гармонии и дает нашему сознанию смысловое бытие чего-либо, являющегося предметом нашего внимания.

Отсюда также можно сделать еще и тот вывод, что развитие системы тех или иных понятий в свете понятия числа должно проистекать из стремления устанавливать сущность вещей через их внутреннюю соразмерность, точно определяемую числом, отношением и отображением друг на друга. Практическая реализация такого подхода, в особенности при изучении объективной реальности, в аспекте единства бытия и небытия, содержащихся в становлении, должна сводиться к изучению структур движения. Заметим, что в современной науке, наиболее разработаны смысловые аспекты понятия числа на основе дуально полярных категорий «многое – одно» и «бытия – небытия»[13].

2. Принципы исчисления действий

Определение бинарного действия

Действие как понятие относится к области знаний о способах преобразований чисел. Естественно, понимание действия при этом будет зависеть от того определения, которое дается самому числу. В современной математике введены в определение числа только две диалектические триады: число есть *многое в одном* [24-27], при условии различения элементов (в арифметике финитных чисел) на основе качественных различий, а в трансфинитной арифметике – на основе признаков существования -*бытия или небытия* [24-27]. Если идет работа с финитным числом, содержащем в своем определении моменты *многого и одного* в хорошо выраженной

---

[12] Число, самоопределясь, само рождает свой смысл, а через него и смысл других вещей. Кстати, нам всем прекрасно известен и тип движения, способный создавать свою противоположность –покой: им является движение циклическое, замкнутое на себя. Именно такой тип движения вполне может быть и основой работы нашего сознания, так как в результате именно такого движения воссоздается покой, как нечто постоянное, неизменное – «след» Вечности – **смысл**. Следует заметить, что при этом само движение, обнаруживающее нам смысл, остается скрытым от нашего сознания, так как в нем бытие и небытие, постоянно сменяя друг друга, сливаются в неразличимую массу нерасчлененных состояний.

[13] Аспекты движения и покоя, содержащихся в категории Числа также впервые затронуты Лосевым [24].

степени определенности, то действие и есть прямое вмешательство в эти два момента сущности числа, подразумеваемого в его определении. Действие, таким образом, изменяет или *многое* в числе или *одно*, или и то и другое вместе.

Прежде всего, надлежит внести уточнения в определение бинарного действия, так как в исчислении рассматриваются в основном именно бинарные действия вида:

$$a \,\alpha\, b = c. \qquad (1.1.1)$$

(в таком обозначении числа a и b называются операндами бинарного дейсвия α . Возникает вопрос, какие именно действия и при каких условиях можно приводить к виду (1.1.1) или, иначе говоря, какие действия над числами допустимо считать бинарными? Как показал опыт построения исчисления действий (ИД) (см. Приложение 1.), определению бинарного действия, с одной стороны, нужно дать расширенное толкование, а с другой оговорить более детально все необходимые для этого условия абстрагирования.

Известно, что к бинарным действиям традиционно относят 7 действий: сложение a+b, вычитание a-b, умножение $a \cdot b$, деление $\frac{a}{b}$ и т.п. Однако, при более внимательном рассмотрении, «вполне» бинарными из них, т.е. с наличием у них только двух операндов a и b, являются только действия сложения и все обратные, а действия умножения и возведения в степень являются бинарными только по форме, которая придается им условно, «искусственно». В развернутом виде в их определении форма именно *бинарного* действия у них исчезает:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b}; \qquad a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \quad . \qquad (1.1.2)$$

Правые части выражений (1.1.2), раскрывая смысл формальных обозначений действий $a{\cdot}b$ и a^b, показывают, что только при целом ряде специальных соглашений, касающихся порядка проведения действий над числами a и b, их количества, а также ряда других требований, им можно придать форму одного действия, и причем *бинарного*. Имея в виду это обстоятельство, приступим к более детальному рассмотрению тех условий, при которых те или иные действия, с их определенным образом упорядоченной структурой допустимо считать именно бинарными.

Математикам как никому другому хорошо известна «тяжесть» проблемы *существования*. Полагание *существования* - это начало всякого математического построения. Для дальнейшего изложения принципов построения ИД и во избежание смешения понятий в самой ее структуре следует оговорить необходимость введения, а затем и непосредственно дать определения различных *видов существования* тех или иных математических объектов.

Исчисление действий(ИД) основывается на различении **сущности** математических объектов и самих **объектов** (имея в ввиду под ними некие явленные сущности). При этом, конечно, предполагается, что **кратность** явленности (данности, положенности, наличности) тех или иных объектов в качестве особой, является весьма важной характеристикой, имеющей непосредственное отношение к формированию структуры действия.

Таким образом в ИД для основных ее объектов, каковыми являются **числа** a, b, c… , **действия над числами** α, β, γ, … , и **опероны** (действия над действиями) Π, Θ, K, Λ, … вводится необходимость различать их *сущности*, обозначаемой знаком **W ,** и *кратность* их данности (наличности, осуществленности, положенности), обозначаемой **C**.

Такое различение, когда это касается многих обычных вещей, а не самих чисел, обычное явление, не вызывающее никаких затруднений и недоразумений.

В самом деле. Пусть имеется некоторая сущность, представленная объектом «a». Тогда вполне понятно, что два множества этих объектов вида {a} и {a, a, a}, хотя и представляют и в первом и во втором множестве **одну и ту же** сущность «a», но ясно, что в первом множестве она представлена единично, а во втором множестве представлена **многократно**, а именно трижды.

Неразличение сущности и кратности данности (положенности, наличности), когда дело касается *чисел*, может порождать недоразумения, т.к. при этом формально число и как сущность есть число, и число, как кратность, также есть число. Проиллюстрируем необходимость такого подхода примерами.

Как известно, функцию *полагания существования* в математике выполняет квантор существования, обозначаемый символом «∃». В традиционной форме записи с использованием этого квантора вида ∃ a, b , конечно, не указывается, какую именно функцию выполняют числа a и b, стоящие под знаком квантора. Полагается ли при этом их существование как сущностей или как кратностей некоторых сущностей в такой формализации не отражается, и в кванторе существования на этот счет не содержится никаких указаний.

Пример 1. ∃a, ∃a, a, a **–** в данном случае первый и второй кванторы утверждают существование *разного количества* ***одной*** сущности $\mathbf{W_a}$, представленной (явленной) объектом a. Тождественность сущностей, стоящих под знаками обеих кванторов, будем записывать следующим образом:

$$\mathbf{W}\,[a] = \mathbf{W}\,[a, a, a].$$

Кратность C данности объекта a в первом случае формально будем записывать как C [a]= 1. Эта запись означает, что объект a представлен *единично*, а во втором -представлен *многократно*, а именно трижды, т.е. C[a, a, a]=3.

Пример 2. ∃ a, a, a, b, b, b, c, b -здесь представлены три числовые сущности, т.е. даны три числа-объекта: a, b и c. Однако кратность их данности различна: c_a=3, c_b=4 и c_c=1.

Итак, для построения ИД специально должны быть оговорены два условия:

- все формализованные в ней объекты, обозначаемые одними и теми же знаками должны являться объектами одной сущности (здесь имеется ввиду, что **сущность того или иного математического объекта задается в определении**).
- объекты, которые в данном контексте должны восприниматься, как разные сущности следует и обозначать разными символами.

В этом смысле, например, множество {a, a, b, b, b, c, b}, элементами которого являются *числа*, представляет три числовые сущности, т.е. всего только три числа: a, b и c. Однако кратность их представленности различна: **a** представлено трижды, **b** представлено с кратностью 4 , а **c** с кратностью 1.

Другой аспект различения типов существования объектов касается проблемы *свободности или связанности их существования*, и требования при формализации исчисления этот момент особо выделять. В исчислении действий для этой цели вводятся понятия *связанного и свободного* существования математических объектов.

Существование объектов назовем ***связанным***, если эти объекты объединены теми или иными действиями в некое единое целое, в некий единый «агрегат». В противном случае их существование будем называть *свободным*.

Пример 1. ∃a, a, a, b, a, a, b, b, c

- в данном случае квантор существования ∃ утверждает *свободное* существование объектов a, b, c в разной кратности их данности.

Пример 2. ∃ a,b, (a α ((b β a γ a) α b γ a) α b **)**

- это алгебраическое выражение утверждает *связанное* существование (в некоем *одном* выражении) объектов a, b. Связывание в этом случае осуществляется действиями α, β, γ

Пример 3. ∃a,b, {a,b}, a+b

-все эти три выражения утверждают разные типы существования. Квантор ∃a,b утверждает *свободное* существование a и b. Квантор ∃{a,b} утверждает *связанное* существование a,b (a и b здесь не просто существуют, но существуют, связанные принадлежностью к множеству {a,b}). Выражение «a+b» утверждает еще более связанное существование a и b. Числа a и b здесь не просто существуют, но существуют объединенными в прямом смысле действием сложения в одно выражение a+b.

Пример 4. $\alpha \equiv a + a + a + a + a$

-алгебраическое выражение α представляет собой пример связанного состояния всего двух сущностей: одна из них есть число a с кратностью 5, а другая есть действие «+» с кратностью 4.

Краткое рассмотрение этих вопросов подводит к возможности дать более строгие определения целому ряду известных понятий, а также ввести некоторые новые. Для этого следует рассмотреть различные аспекты определения непосредственно самого числа. **Число** - носитель идеи множественности. Но множественность – это только одна половина сущности числа, выраженная в его модуле. Вторая половина определения числа, основывается на идее монады, т.к. число являет собой образ некого единства, некого единого целого. Число есть *многое* в *одном*, есть *многоединство* особого рода, когда «внутреннее» различение составных элементов числа опирается только на факт их бытия, факт их существования (existential) (без обращения к качественной или порядковой определенности их взаимных различий). Таким образом, в ИД мы придерживаемся определения числа в смысле Кантора-Лосева, тождественного понятию мощности множества [18, 27]:

Число *есть многое, объединенное одно, когда различия между элементами этого многого опираются только на факт их бытия, факт их существования (без обращения к качественной или порядковой определенности их взаимных различий).*

Этих кратких замечаний, на наш взгляд достаточно, чтобы *действию над числом* дать определение.

Определение 1. **Действие над числом есть способ изменения сущности числа.**

Из этого определения следует, что изменить число - значит изменить его сущность, содержащуюся по определению в его „ многоединстве ”. Иными словами, это означает, что требуется изменить либо его модуль (*многое* числа), либо его вторую часть, в которой число представлено как *монада, как нечто единое.* Эта вторая часть есть *качество* числа (положительное, отрицательное, мнимое и т.п.). Отсюда также следует, что отождествить два числа -значит привести их сущности (модуль и качество) к тождеству.

Определение 2. **Алгебраическое выражение** –это множество чисел, связанных в одно целое некоторым заданным и упорядоченным множеством действий (кратность чисел и действий произвольна).

Примеры алгебраических выражений:

1. $(a\,\beta\,a\,\gamma\,a)\,\alpha\,a\,\gamma\,a$
2. $a\,\alpha\,[(b\,\beta\,a\,\gamma\,a)\,\alpha\,b\,\gamma\,a]\,\alpha\,b$

Определение 3. **Унарное действие** $\alpha(a)$ - алгебраическое выражение α с одной числовой сущностью a (кратность числа и действий произвольна).

Примеры унарных действий:

1. $\alpha(a) = (a\,\beta\,a\,\gamma\,a)\,\alpha\,a\,\gamma\,a$
2. $\beta(a) = a + a^2 + a^3$
3. $\gamma(a) = a + a^2 + a^3 + \ldots = \frac{1}{1-a}$, $(0 < a < 1)$.

Определение 4. **Бинарное действие** $a\,\eta\,b$ - алгебраическое выражение с двумя числовыми сущностями a и b.

Для бинарного действия принимаем следующие обозначения:

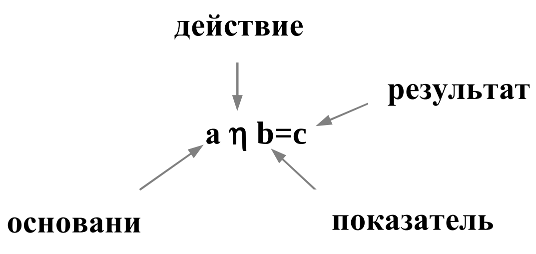


Рис. 1.1.2. Составные части бинарного действия

Здесь числа a и b являются *операндами* действия η. Левый операнд «a» называется *основанием*, а правый «b» -*показателем* этого действия, «c» -результатом.

Примеры бинарных действий:

1. Бинарное действие η : $a\,\eta\,b = a\,\alpha\,((\,b\,\beta\,a\,\gamma\,a\,)\,\alpha\,b\,\gamma\,a\,)\,\alpha\,b$

2. Другие примеры определений бинарных действий α, β, γ:

$$\frac{a - b}{a + b} = a\ \alpha\ b, \qquad a^{b} \cdot b^{a} = a\ \beta\ b,$$

$$\log_{(a+b)} \frac{a}{b} = a\ \gamma\ b.$$

О п р е д е л е н и е 5. **Объем действия V**[α] – это множество из кратностей чисел и действий, входящих в структуру определения действия α:

$$\mathbf{V}[a\,\alpha\,b] = \{c_a, c_b\ \ldots\ ; c_\alpha, c_\beta, c_\gamma \ldots\},$$

где c_a, c_b … - кратности чисел; c_α, c_β, c_γ… кратности действий.

Пример 1. Дано действие η: $a\,\eta\,b = a\,\alpha\,[(\,b\,\beta\,a\,\gamma\,a\,)\,\alpha\,b\,\gamma\,a\,]\,\alpha\,b$.

Объем действия η: $\mathbf{V}[a\,\eta\,b] \equiv \mathbf{V}[a\,\alpha\,[(\,b\,\beta\,a\,\gamma\,a\,)\,\alpha\,b\,\gamma\,a\,]\,\alpha\,b] = \{c_a=4, c_b=3; c_\alpha=3, c_\beta=1, c_\gamma=2\}$.

В чем отличие описываемых подходов от общепринятых, используемых в современной теоретической арифметике и алгебре?

Первое:

В ИД предлагается иметь дело с числовыми <u>сущностями</u>, и абстрагироваться от кратности вхождения чисел в те или иные алгебраические выражения[14].

Второе:

При определении **действий над числами** подчеркивается необходимость абстрагирования от количества копий числа, считая их одним числом, а **собственно *действиями* над числами предлагается считать именно те, которые выполняют в отношении числа не копирующую и «множительную», а, прежде всего, преобразующую функцию.**

Третье:

При определении того или иного бинарного действия допускается применение ***различных*** арифметических или алгебраических действий (а не только какого-либо одного, как это делается обычно, например, при определении умножения $a \cdot b = a + a + a + \ldots + a$). Это позволяет в ИД создавать действия гораздо более сложной структуры, чем это обычно принято, за счет включения в структуры их определений множества самых разных действий[15].

---

[14] Конечно, этот приём не нов, и в явном или неявном виде уже используется в самой арифметике. Например, умножение, $a{\cdot}b$ считается *бинарным* действием над числами a и b. Хотя его определение в развернутом виде: $a{\cdot}b = a+ a+ \ldots +a$ - есть многократное сложение одного и того же числа, и в таком виде имеет форму не бинарного действия.

[15] В этом смысле теперь выражение «$a\ \chi\ (a\ \beta\ a)\ \ldots\ )\ \gamma\ a$» вполне допустимо считать *монодействием*. Для этого нам пришлось постулировать, что действие над числами *может иметь различные части:* χ, β, γ (а не только состоять многократно из *одной* какой-либо части: или только χ, или только β, или только γ), т.е. может быть создано из действий разных сущностей. Например, в случае с умножением: $a \cdot b = a+ a+ \ldots +a$, его структуру определяет только одно действие α = „+", но повторенное (b - 1) раз.

Четвертое:

И, наконец, для обеспечения дальнейшего свободного развития понятия **действие**, в ИД допускается возможность **составления** вновь определяемого монодействия Δ из тех или иных ранее определенных, известных действий различной кратности. В этом случае действие Δ будет являться некой функцией **f** и от самих этих действий и от их кратностей:

$$\Delta = \mathbf{f}\,(n\alpha,\ m\beta,\ p\gamma).$$

В такой записи монодействие Δ приобретает* структуру, *и оказывается составленной из действий α, β и γ с кратностями, соответственно m, n и p.

Все эти приемы в совокупности позволяют придавать любому вновь определяемому действию форму бинарного несмотря на «не бинарность» формального вида его определения, а также несмотря на многократность вхождения в него чисел a и b, и многократность использования в алгебраической структуре* различных *алгебраических операций.

В этой связи, например, выражение a+ab+b вполне допустимо считать бинарным действием, обозначая его символом υ (если отвлечься от того, что числа a и b входят многократно в данное выражение, а именно дважды, и что оно составлено не из одного, а сразу из двух действий -сложения и умножения):

$$a\ \underline{\upsilon}\ b = a + ab + b.$$

Аналогично, отвлекаясь от количества вхождений чисел a и b и от количества соединяющих их действий, следующие выражения также можно считать бинарными действиями, обозначая их соответственно α, β, γ :

$$\frac{a - b}{a + b} = a\ \alpha\ b, \qquad a^{b} \cdot b^{a} = a\ \beta\ b, \qquad \log_{\frac{a}{b}} (a + b) = a\ \gamma\ b.$$

Подобный прием абстрагирования от кратности данности некоей сущности в определении тех или иных объектов математики, не нов. Традиционно он используется при определениях весьма многих математических объектов.

Пример 1. Параллельный перенос не изменяет вектора $\vec{a}$, т.е. не изменяет его сущности, и потому, когда мы видим такую картину на плоскости (рис. 1.1.3), говорим, что имеем дело, не со множеством векторов, а с одним вектором $\vec{a}$. При этом производится абстрагирование от различий в «привязке» к системе координат (x, y, z), т.е. от векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ (копий много, а вектор один):

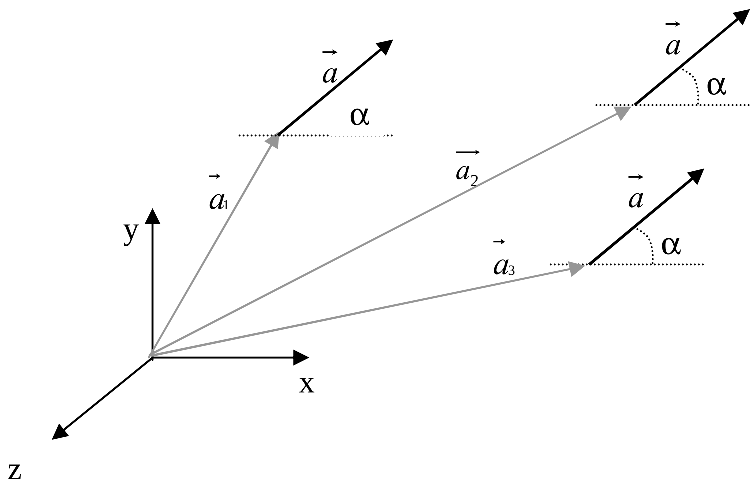


Рис. 1.1.3. Многократное представление *одного* вектора $\vec{a}$ на плоскости.

Пример 2. Определение периодической функции также предполагает абстрагирование от сдвига во времени:

$$f(x)= f(x + 2\pi n))= f(x + 2\pi m).$$

Из предложенного подхода и данного нами определения бинарному действию вытекает очень важная естественная и вполне конструктивная возможность *сравнения* (*отождествления)* двух действий:

Определение 6. *Два действия* α *и* β *равны на множестве* U *, если для всех чисел из* U *они дают равные результаты:*

$$\forall a,b \in U\big((a\,\alpha\, b = a\,\beta\, b) \leftrightarrow (\alpha = \beta)\big). \qquad (1.1.3)$$

В противном случае два действия α *и* β *не равны на множестве U, если :*

$$\exists a,b \in U\big((a\,\alpha\, b \neq a\,\beta\, b) \leftrightarrow (\alpha \neq \beta)\big). \qquad (1.1.4)$$

В заключение целесообразно еще раз напомнить и уже в окончательном виде сформулировать основные требования к формализации, принятые в ИД :

обозначать одними и теми же символами одни и те же алгебраические сущности (независимо от связности или свободности их существования), абстрагируясь соответственно от кратности их данности.

Основной и показательный квантрон

В отношении к *преобразующим* свойствам действий над числами целесообразно выделить два специальных типа действий. К первому типу следует отнести *собственно* действия в обычном, общепринятом смысле, т.к. они изменяют само число, его сущность, т.е. или изменяют его модуль, или его качество. Что формально записывается так: $\Delta(a) = b$. Эта запись означает, что Δ подействовало на число a и получилось другое число b не равное исходному.

Для целей развития «технологии» ИД не менее важно выделить и более подробно обсудить второй не менее важный тип действия. К этому второму типу следует отнести не собственно действие, а некоторый его «аналог», т.к. с его помощью создается возможность оперировать не с сущностями чисел и действий, а с их кратностями. Эти действия являются как бы квазидействиями или «преддействиями». Они реально участвуют только в подготовительном формировании определений различных новых действий и выполняют при этом для тех или иных математических объектов копирующую, множительную функцию, не изменяющую их сущности. Числа и действия при таких преобразованиях остаются подобными, точнее, тождественно равными себе.

Итак, этой «операции» поручается специфическая «работа» не с сущностями чисел, а именно с их кратностями, т.е. с многократным бытием одной и той же сущности. Для конкретного осуществления и построения подобных квазиопераций в ИД вводится обобщенный «синтетический» принцип, называемый условно **рон-принципом**. Одной его составляющей является принцип **совмещения в одно целое разнонаправленных (полярных) по смыслу операций,** с последующим его повторением и использованием в качестве нового преобразования. Такой прием назовем *роновым*, хотя само название «рон» лишь частично отражает его смысл. Прием, называемый нами **Рон-принципом**, вводится как некий обобщенный принцип рекурсии (***рон** –аббревиатура латинского названия принципа естественного повторения операций: **r**epetitio **o**peratio **n**aturalis–«**ron**»*). Он состоит из трех составляющих:

- цикличности повторения какого-либо действия с целью увеличения его кратности (объема);
- совмещения в одно противоположных по смыслу элементарных операций;
- самоподстановки, самозамыкания (рекурсии), самокопирования.

Поясним более детально его суть. В целом он представляет собой прием, основывающийся на повторениях двух прямо противоположных по смыслу операций преобразования некоего объекта и последующего объединения, совмещения их в одно целое.

Пусть имеется некий объект a и способ α, который позволяет из a получить новый объект b. Этот способ - *первое преобразование*. Схематически его изобразим как на рис. 1.1.4. а).

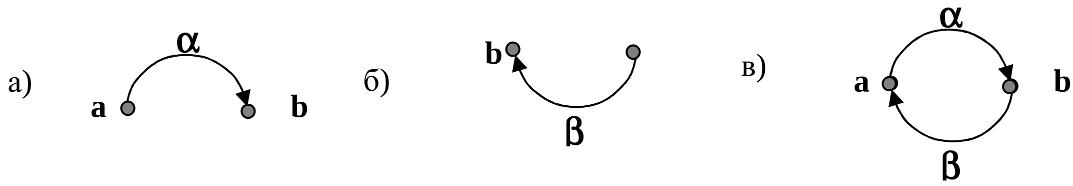


Рис. 1.1.4. Элементы и фазы замыкания

Вводим *второе преобразование*: объект b подставляем вместо a (т.е. *возвращаем* назад в один из операндов действия). Сам факт *подстановки* можно понимать, как некое иное новое преобразование β (см. рис. 1.1.4. б)).

Конечно, преобразующие функции операций α и β качественно различны. Первое α – действительно преобразование, а второе β–*просто возвращение, копирование* полученного результата в исходный пункт без изменения. В операциях α и β наличествуют как бы сходственно-противоположные моменты. Действие α, преобразуя число, изменяет его сущность, зафиксированную в его определении. Действие β, наоборот, перемещает число из конечного пункта в начальный, не меняя его по существу. Объединяя эти два преобразования в одно, мы получаем новый преобразующий элемент. Он представляет собой один период нового «+ –» - единого преобразования, напоминающего вращение (рекурсия), но только дискретное (см. рис. 1.1.4. в)):

Такое преобразование объекта a уместно считать элементарным «квантом» самозамкнутого действия над **кратностями** чисел, включенных в структуру действия, который назовем **квантроном** и будем обозначать символом **@**.

Определение 7. **Квантрон @** есть способ изменения объема действия, состоящий в *одно*шаговом самозамыкании результата действия (подстановкой) в операнды.

Применительно к случаю с бинарными действиями над числами получается следующая картина. Имеем бинарное действие α над числами a и b, которое позволяет получить результат c (см. рис. 1.1.5. а)):

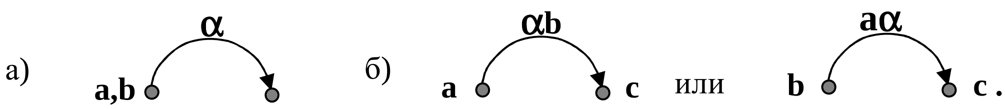


Рис. 1.1.5. Элементы и фазы замыкания в бинарном действии

В общем случае числа a и b у бинарных действий выполняют различные функции. Одно из чисел (любое) является объектом преобразования, а другое преобразующим элементом, т.е. выполняет функции самого действия. С учетом этого замечания схема преобразования будет выглядеть как на рис. 1.1.5. в). Тогда различных вариантов замыканий (т.е. различных определений квантронов) результата **c** в начальный пункт возможно несколько.

Определение 8. **Основной квантрон** –одношаговое увеличение объема действия самоподстановкой результата действия в основание:

$$@^{1}(a\,\underline{\alpha}\,b) = (a\,\underline{\alpha}\,b)\,\underline{\alpha}\,b$$

Определение 9. **Показательный квантрон** –одношаговое увеличение объема действия самоподстановкой результата действия в показатель:

$$\overrightarrow{@}^{1}(a\,\underline{\alpha}\,b) = a\,\underline{\alpha}\,(a\,\underline{\alpha}\,b)$$

Квантрон, определяемый далее называется бирекурсивным, т.к. при его определении осуществляется двойная самоподстановка результата, т.е. в каждый из операндов.

О п р е д е л е н и е   10. **Бирекурсивный квантрон**–одношаговое увеличение объема действия самоподстановкой результата действия и в основание и в показатель:

$$\overleftrightarrow{@}^{1}(a\ \underline{\alpha}\ b) = (a\ \underline{\alpha}\ b)\ \underline{\alpha}\ (a\ \underline{\alpha}\ b)$$

Соответственно квантрон допускает возможность его повторного применения, и, тем самым, построения на его основе различных квантронных композиций:

1. Композиции основных квантронов:

$$\overleftarrow{@}^{0}(a\ \underline{\alpha}\ a) = a\ \underline{\alpha}\ a \qquad \text{-пустой}$$

$$\overleftarrow{@}^{1}(a\ \underline{\alpha}\ a) = (a\ \underline{\alpha}\ a)\ \underline{\alpha}\ a \qquad \text{-}$$

$$\vdots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overleftarrow{@}^{n}(a\ \underline{\alpha}\ a) = \underbrace{\overleftarrow{@}\overleftarrow{@}\ldots\overleftarrow{@}}_{n}(a\ \underline{\alpha}\ a) =$$

$$= \underbrace{\big((a\ \underline{\alpha}\ a)\ \underline{\alpha}\ a\big)\ \underline{\alpha}\ a\ldots\underline{\alpha}\ a}_{n+1} \qquad \text{- n-кратный}$$

1. Композиции показательных квантронов:

$$\overrightarrow{@}^{0}(a\ \underline{\alpha}\ b) = a\ \underline{\alpha}\ b \qquad \text{-пустой}$$

$$\overrightarrow{@}^{1}(a\ \underline{\alpha}\ b) = a\ \underline{\alpha}\ (a\ \underline{\alpha}\ b) \qquad \text{-}$$

$$\vdots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overrightarrow{@}^{n}(a\ \underline{\alpha}\ b) = \underbrace{\overrightarrow{@}\overrightarrow{@}\ldots\overrightarrow{@}}_{n}(a\ \underline{\alpha}\ b) =$$

$$= \underbrace{\alpha\ \underline{a}\ldots\big(\ \alpha\ \underline{a}(a\ \underline{\alpha}\ b)\big)}_{n+1} \qquad \text{- n-кратный}$$

Иерархическая свертка, оперон

Как следует из предыдущего рассмотрения - квантрон является подготовительной операцией, которая является необходимым элементом, «квантом» в формировании нового действия над числом. Его назначение состоит в *размножении двух сущностей*: числа и действия. Это размножение является не совсем обычным, так как происходит внутри некоего единого образования (само в себе), постепенно при этом увеличивающегося в «размерах», но остающегося несмотря на это в рамках одной и той же сущности действия и числа:

Номера шагов самозамыкания	Результат
0	$a\ \underline{\alpha}\ a$
1	$(a\ \underline{\alpha}\ a)\ \underline{\alpha}\ a$
$\vdots$	$\vdots$
b	$\underbrace{\big((a\ \underline{\alpha}\ a)\ \underline{\alpha}\ a\big)\ \underline{\alpha}\ a}_{b+1}$

Примеры квантронного увеличения объемов действий:

Пример 1. Для сложения:

0	$a+a$
1	$a+a+a$
$\vdots$	$\vdots$
	$\underbrace{a+a+a\ldots+a}_{b+1}$

Пример 2. Для умножения:

$$
\begin{array}{cl}
0 & a \cdot a \\
1 & a \cdot a \cdot a \\
 & \vdots \\
\vdots & \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots \cdot a}_{b+1}
\end{array}
$$

Каждое такое алгебраическое выражение $\underbrace{a\,\underline{\alpha}\dots\big(a\,\underline{\alpha}(a\,\underline{\alpha}\,a)\big)}_{b}$ есть единое образование, которое с каждым актом рекурсии количественно увеличивается в размерах за счет увеличения кратности вхождения в определяемое действие числа a и связывания его копий в единое целое многократным повтором действия α. В заключение можно сказать, *что квантрон выполняет функцию увеличения «объема» действия α.*

Этот процесс увеличения объема, вообще говоря, может продолжаться сколь угодно долго. Однако известное диалектическое требование состоит в том, чтобы всякий такой процесс нарастания был стеснен (т.е. становление прекращено, остановлено). Этот прием является иллюстрацией опять-таки принципа соединения в одно двух противоположностей: расширения и стеснения, движения и покоя. Итак, процесс нарастания кратностей одних и тех же сущностей должен быть остановлен. Каким должен быть критерий этой остановки (стеснения)?

Исходное действие $a\underline{\alpha}b$ было бинарным. Мы имеем возможность, используя принцип дискретного вращения (подстановкой, самозамыканием), размножать его элементы. Выход из «дурной» бесконечности и незавершенности возникающего при этом процесса состоит в том, чтобы использовать для этого *второе число*, придав ему выполнение двойной функции. Оно должно стать объектом нового высшего действия β, то есть войти в его состав, а именно, в структуру вновь определяемого бинарного действия. Число должно стать указателем того конкретного процесса, с помощью которого определяется новое действие β на основе вполне определенного преобразования действия α. Следовательно, число b должно стать указателем сразу на несколько взаимозависимых моментов, определяющих структуру вновь определяемого действия. А именно, что

- квантрон применен b-2 раза,
- само действие при этом размножилось b-1 раз,
- кратность вхождения числа a в высшее действие при этом равна числу b.

Формально такая запись выглядит так (стрелка, в данном случае, указывает на адресацию подстановок):

$$a\ \underrightarrow{a+1}\ b = \underbrace{a\ \underline{a}\dots\big(a\ \underline{a}(a\ \underline{\alpha}\ a)\big)}_{b} = a\,\underline{\beta}\,b\ .$$

Ограничение роста объема действия значением числа b приводит к тому, что *кратность* числа a в структуре определяемого действия α оказывается равной b, а *кратность* самого действия α оказывается равной b-1.

Придание именно такого смысла всей этой процедуре и позволяет в итоге возвратить действию *бинарную форму*, которая на промежуточном этапе указанных преобразований временно утрачивается.

Таким образом, процедура построения высшего действия β оказывается «квантованной». Для ее получения используется принцип отрицания отрицания:

- для получения квантрона, путем объединения в *одно целое* двух полярных движений: одного направленного из начала в конец, а другого -из конца в начало (рекурсия);

- для стеснения количественного нарастания квантрона (где моменты нарастания и стеснения, движения и покоя также противоположны и также соединяются в одно).

На этом этапе обсуждения принципов построения исчисления действий мы приходим к целесообразности введения нового важнейшего понятия - **оперона** $\mathrm{P}(\alpha)$, как некоей *ограниченной* композиции квантронов, назначение которого состоит в преобразовании собственно самого действия.

Определение 11. **Опероном** $\mathrm{P}(\alpha)$ *назовем финитно ограниченную композицию квантронов:*

$$\mathrm{P}(\alpha) = \underbrace{\underline{@}\underline{@}\underline{@}\ldots\underline{@}}_{b-2}\ (\alpha)$$

Конкретизируя тип замыкания и кратность повторения квантронов числом b-2 , определим основные разновидности оперонов.

Определение 12. **Оперон основной** $\overleftarrow{\mathrm{P}}^{1}$ есть (b-2)-кратная *композиция* основных квантронов:

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}\left(\mathrm{a}\underline{\alpha}\mathrm{b}\right) = \underbrace{\overline{\underline{@}}\,\overline{\underline{@}}\ldots.\overline{\underline{@}}}_{\mathrm{b}-2}(\mathrm{a}\ \underline{\alpha}\ \mathrm{b})$$

Определение 13. **Оперон показательный** есть (b-2)-кратная *композиция* показательных квантронов:

$$\overrightarrow{\mathrm{P}}^{1}\left(\mathrm{a}\underline{\alpha}\,\mathrm{b}\right) = \underbrace{\overline{\underline{@}}\,\overline{\underline{@}}\ldots.\overline{\underline{@}}}_{\mathrm{b}-2}(\mathrm{a}\ \underline{\alpha}\ \mathrm{b})$$

Определение 14. **Оперон бирекурсивный** есть (b-1)-кратная *композиция* бирекурсивных квантронов:

$$\overleftrightarrow{\mathrm{P}}^{1}\left(\mathrm{a}\underline{\alpha}\,\mathrm{b}\right) = \underbrace{\underline{@}\underline{@}\underline{@}\ \ldots\underline{@}}_{\mathrm{b}-1}(\mathrm{a}\,\underline{\alpha}\,\mathrm{b})$$

Такое определение оперона позволяет всякий раз <u>возвращать</u> вновь определяемому действию форму бинарного действия, от которой изначально приходится уходить квантронным преобразованием:

$$\mathrm{P}(\mathrm{a}\,\underline{\alpha}\,\mathrm{b}) = \mathrm{a}\,\underline{\beta}\,\mathrm{b}\,.$$

Происходит трансформация действия α, так что уже $\alpha \neq \beta$. (Процедура получения действия β более высокой ступени обобщения, и более сложной структуры из действия α подробно дается в таблице 1.1.1.)

Для чего следует проводить ограничение композиции квантронов? Это позволяет получить новый математический объект - **оперон** - новую «операцию», но уже над <u>самими действиями</u>. Причем *оперон* в этом случае выступает в виде некоего нового, уже высшего «кванта» содержательного преобразования действия. Уместно этот квант условиться считать единичным и строго отличать от других преобразователей самих действий над числами.

Переходы от действия α к действиям $\underrightarrow{\alpha+1}$ и $\underleftarrow{\alpha+1}$ представлены в табл. 1.1.1 и табл. 1.1.2, и являются развернутыми определениями операторов повышения ступени действия на единицу (рекурсией в основание или в показатель). Эти виды «замыканий» позволяют получать новые действия, в том числе и от любого нового, постулированного как базового или некоего вновь только что полученного.

Определение *основного* оперона. Таблица. 1.1.1.

	Этапы	Содержание	Формальный вид
I	Постулируем бинарное действие	***Действие α существует***	$a\ \underline{\alpha}\ b = c$
II	Накопление количественных изменений в исходном действии.	*«Унаризация» исходного бинарного действия a α b полаганием a = b*	$a\ \underline{\alpha}\ a$
		Квантронное (слабое, количественное) увеличение кратности действия a α a. (Увеличивается количество копий ***a, α*** *и* **@** *)*	$a\ \underline{\alpha}\ a$ $(a\ \underline{\alpha}\ a)\ \underline{\alpha}\ a$ $\vdots$ $\underbrace{((a\ \underline{\alpha}\ a)\ \underline{\alpha}\ a)\ \underline{\alpha}\ a\dots\underline{\alpha}\ a}_{b}$
III	Формосодержательное завершение композиции квантронов.	*Унарному* действию $\underbrace{(((a\alpha\ a)\dots\ \alpha\ a)\ \alpha\ \ a)\ \alpha\ a}_{b}$ придается форма *бинарного* действия.	$\underbrace{(((a\underline{\alpha}\ a)\dots\ \underline{\alpha}\ a)\ \underline{\alpha}\ \ a)\ \underline{\alpha}\ a}_{b} = a\underset{\leftarrow}{\beta}\ b$ В оперонной форме: $\overset{\leftarrow}{P}^{1}(a\ \underline{\alpha}\ b) = a\ \underset{\leftarrow}{\beta}\ b$, $\overset{\leftarrow}{P}^{1}(\alpha) = \underbrace{@@@\dots@}_{b-2}$

В развернутом виде: $$\overset{\leftarrow}{P}^{1}(a\underline{\alpha}b) = a\ \underset{\longleftarrow}{\alpha+1}\ b = \underbrace{(((a\ \alpha\ a)\underline{\alpha}a)\dots)\underline{\alpha}a}_{b} \qquad (1.1.5)$$

Аналогично определяется $\vec{P}^{1}\left(a\underline{\alpha}b\right)$ (см. табл. 1.1.2.):

Определение *показательного* оперона. Таблица. 1.1.2.

	Этапы	Содержание	Формальный вид
I	Постулируем бинарное действие	***Действие α существует***	$a\ \alpha\ b = c$
II	Накопление количественных изменений в исходном действии.	*«Унаризация» бинарного действия a α b: полагаем a = b*	$a\ \alpha\ a$
		Квантронное (слабое, количественное) увеличение кратности действия a α a. (Увеличивается количество копий ***a, α*** *и* **@** *)*	$a\ \alpha\ a$ $a\ \alpha\ (a\ \alpha\ a)$ $\vdots$ $\underbrace{a(\ \alpha\ (a\dots(a\ \alpha\ (a\ \alpha\ a))))}_{b}$
III	Формосодержательное замыкание композиции квантронов.	*Унарному* действию $\underbrace{a\alpha\ (a\dots a(\alpha\ \ (a\alpha\ a)))}_{b}$ придается форма *бинарного* действия.	$\underbrace{a\alpha\ (a\dots a(\alpha\ \ (a\alpha\ a)))}_{b} = a\underset{\rightarrow}{\beta}\ b$ В оперонной форме: $\vec{P}^{1}(a\ \ \alpha\ b) = a\ \underset{\rightarrow}{\beta}\ b$, $P(\alpha) = \underbrace{@@@\dots@}_{b-2}(\alpha)$

В развернутом виде: $$\vec{P}^{1}(a\underline{\alpha}b) = a\,\underrightarrow{\alpha + 1}\,b = \underbrace{a\,\underline{\alpha}(a\,\underline{\alpha}\ldots(\underline{\alpha}(a\,\underline{\alpha}\,b)))}_{b}. \qquad (1.1.6)$$

Обратные действия и опероны обратных действий

Подробно свойства оперонов обратных действий излагаются и исследуются в соответствующих разделах главы 2 (см. Прил. 1). Здесь дается лишь краткая сводка их определений, необходимых для изложения непосредственно следующего раздела о <u>ступенях</u> бинарных действий.

Обобщенный корень. *Число* $c = a\,\bar{\alpha}\,b$ *(* $a\,\bar{\alpha}\,b \equiv \sqrt[a]{b}^{\,\alpha}$ *) называется обобщенным корнем a-й степени из b ступени α, если оно удовлетворяет условию:*

$$c\,\alpha\,a = (a\,\bar{\alpha}\,b)\,\alpha\,a = b\ .$$

Переход от прямого действия к обратному будем понимать как некий особый оперон, позволяющий построить новое действие, отличное от исходного и обозначать его символом K, т.е. $K(\alpha) = \overleftarrow{\alpha}$ и $\alpha \neq \overleftarrow{\alpha}$.

Оперон корня K *есть преобразование прямого действия* α *в обратное* $\overleftarrow{\alpha}$, *осуществляемое по следующему правилу:*

- *На основе прямого действия* α *вводится уравнение, где в качестве неизвестного принимается основание бинарного действия:*

$$a_x\ \alpha\ b = c\,.$$

- *Результат решения этого уравнения записывается в виде:*

$$a_x = b\,\bar{\alpha}\,c = \sqrt[b]{c}^{\,\alpha}\ .$$

В оперонной форме это преобразование будет иметь вид: $K(\alpha) = \overleftarrow{\alpha}$. Эта запись означает, что оперон K преобразует действие α в обратное действие $\overleftarrow{\alpha}$.

Обобщённым логарифм. *Число* $c = a\,\alpha\,b\ = l\alpha g_b a$ *называется обобщённым логарифмом числа a по основанию b ступени α, если при этом для c выполняется следующее условие:*

$$b\,\alpha\,(a\,\alpha\,b) = a$$

Оперон логарифма L *есть преобразование прямого действия* α *в обратное* $\vec{\alpha}$, *осуществляемое по следующему правилу:*

- *Вводится уравнение, где за неизвестное принимается показатель:*

$$a\,\alpha\ b_x = c\,.$$

- *Результат решения уравнения записывается в виде:*

$$b_x = c\,\alpha\,a = l\alpha g_a c\ .$$

В опероновой форме это преобразование действия α будет иметь вид:

$$L\,(\alpha) = \vec{\alpha}\,.$$

Ступень действия и β-ряд

Известно, что в целях «экономии мышления» гораздо удобнее «конструировать» натуральные числа, начиная с простейшего числа – единицы. Последовательно прибавляя его к себе самому, можно получить весь натуральный ряд. Деля далее элементы натурального ряда друг на друга, -получить рациональные числа и т.д. Но, при этом, как бы, всегда имеется в виду, что исходным, начальным числом была единица 1.

Аналогично, при «конструировании» <u>множества</u> действий также имеет смысл говорить о некотором исходном, базовом действии α. Применяя к нему различные опероны и их композиции, будем получать все новые и новые действия β , χ , δ. . . . Все они, так или иначе будут некими функциями от преобразования начального действия α. Они будут **ступенями** преобразований именно этого действия α.

Если оперон П преобразует действие α в действие β, т.е. $\Pi(\alpha)=\beta$, то исходное действие α будем называть *начальным,* а полученное действие β будем называть *производным.*
β-рядом назовем всякий ряд производных действий γ, δ, λ …, последовательно получаемый с помощью оперонов P, L, и K из некоторого начального действия β**.**

Базовым действием *β-ряда* будем называть самое первое начальное действие β**.**

В современной математике, а именно арифметике, практически используется только одно базовое действие -*сложение*. Из него и строятся 6 остальных действий: вычитание, деление, умножение...и т.п.

Главным β-рядом назовем ряд производных прямых и обратных действий $\beta, \gamma, \delta, \lambda$ …, последовательно получаемых из **сложения**, как базового действия, с помощью оперонов P, L, и K.

Прямые действия главного β-ряда:

Новое обозначение	$a\,\underset{\to}{1}\,b$	$a\,\underset{\to}{2}\,b$	$a\,\underset{\to}{3}\,b$	$a\,\underset{\to}{4}\,b$	$a\,\underset{\to}{5}\,b$	…	$a\,\underset{\to}{\alpha}\,b$
Старое обозначение	**a+b**	$a \cdot b$	a^b	$^{b}\!\cdot a$	…	…	…

Базовое действие Производные

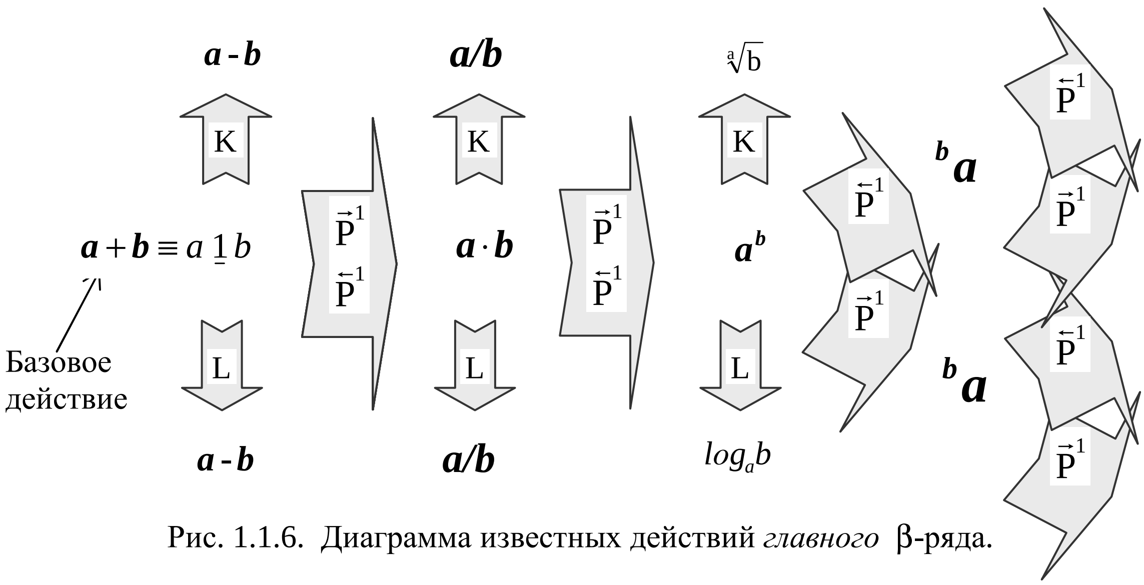


Рис. 1.1.6. Диаграмма известных действий *главного* β-ряда.

Рассмотрим, какими в общем случае могут быть ветви преобразования базового действия α: a $\underline{\alpha}$ b = c.

Во-первых, мы можем использовать два оперона повышения ступени. С замыканием результата бинарного действия в основание (см. рис. 1.1.7. а):

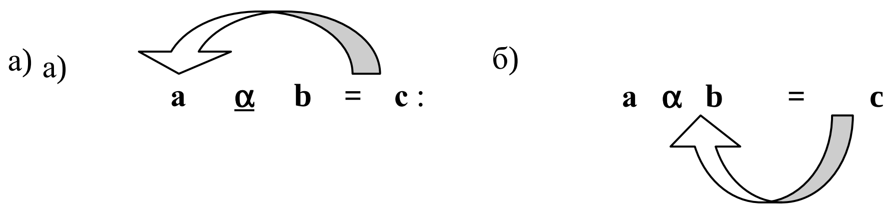


Рис. 1.1.7. Элементы и фазы замыкания в бинарном действии в основание а) и б).

Тогда получим:

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}(a\,\underline{\alpha}\,b) = a\,\underset{\leftarrow}{\beta_1} b = \underbrace{((a\,\alpha\,a)\,\underline{\alpha}\,a)\,\underline{\alpha}\,a....\underline{\alpha}\,a}_{n}$$

и в показатель (см. рис. 1.1.7. б). Тогда получим:

$$\overrightarrow{\mathrm{P}}(a\,\underline{\alpha}\,b) = a\,\underset{\longrightarrow}{\beta_2}\,b = \underbrace{\underline{\alpha}\,\underline{a}....(\,\alpha\,\underline{a}(a\,\underline{\alpha}\,a))}_{n}$$

Оба эти оперона повышают ступень преобразования действия, начиная со сложения. Принимая преобразующую «силу» оперонов $\overleftarrow{\mathrm{P}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ за единицу, возможно, выразить эти записи так:

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}(a\,\underline{\alpha}\,b) = a\,\underset{\leftarrow}{\beta_1} b = \underbrace{((a\,\underline{\alpha}\,a)\,\underline{\alpha}\,a)\,\underline{\alpha}\,a....\,\underline{\alpha}\,a}_{n} = a\,\underset{\longleftarrow}{\alpha+1}\,b$$

где стрелка внизу указывает на особенность примененного оперона, а запись $a\,\underset{\longleftarrow}{\alpha+1}\,b$ с прибавлением 1 говорит о том, что к действию α применен оперон $\overleftarrow{\mathrm{P}}$ один раз. Аналогично:

$$\overrightarrow{\mathrm{P}}(a\,\underline{\alpha}\,b) = a\,\underset{\longrightarrow}{\beta_2}\,b = \underbrace{a\,\underline{a}....(\,a\,\underline{\alpha}(a\,\underline{\alpha}\,a))}_{n} = a\,\underset{\longrightarrow}{\alpha+1}\,b.$$

Следует обратить внимание на то, что для выделения ***прямых*** *действий используется подчеркивание снизу, для* ***обратных*** *–сверху.*

В общем случае бинарные операции некоммутативны:

$$a\,\underline{\alpha}\,b \neq b\,\underline{\alpha}\,a\ .$$

Поэтому, проводя рекурсию, возврат, подстановку результата в основание a или в показатель b, мы получим разные действия. Наиболее ярко это видно на примере обобщения степени в сверхстепень. Пусть $a\,\underline{\alpha}\,b = a^b = c$. Подставим многократно c в основание:

$$\underbrace{((a^{b})^{b})^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}b)}}_{b} = c_1\,.$$

Полагая, что a=b , получим:

$$\underbrace{((a^{a})^{a})^{\cdot^{\cdot^{\cdot}})a}}_{b} = {}^{b}a\ . \qquad (1.1.7)$$

В выражении (1.1.7) показатель b называется показателем слабой сверхстепени [9,10,15]. Если же возврат (рекурсию) результата провести в показатель b, получим:

$$a^{\underbrace{(a^{(\cdot^{\cdot^{\cdot}}(a^{b})})}_{b}} = c_1\,.$$

Полагая a=b и сокращая запись, получим:

$$a^{\underbrace{(a^{(\cdot^{\cdot^{\cdot}}(a^{a})})}_{b}} = \overset{b}{\cdot}\ a\ . \qquad (1.1.8)$$

Формула (1.1.8) есть сильная (показательная) сверхстепень и по своим свойствам она резко отличается от свойств слабой (основной) сверхстепени ${}^{b}a$ (хотя обе эти операции появляются на одной и той же 4-й ступени обобщения). Учет различия рекурсий в основание или в показатель - один из ключевых моментов и с ч и с л е н и я, позволивший получить наиболее интересные результаты.

Всякий оператор (оперон)- это новый математический объект, выражающий идею о законе П преобразования одного действия α в другое β:

$$\Pi\,(\alpha) = \beta.$$

В процессе преобразования действия происходит преобразование и ступени действия. Введение понятия “*ступени действия*”, как абстрактно-количественной его характеристики, отражающей в своей формальной структуре основные моменты процесса обобщения базового действия, и является также важнейшим моментом и с ч и с л е н и я д е й с т в и й. По своему назначению “ступень действия” формально отражает в себе все основные моменты трансформации действия начальной ступени.

Если принять ступень действия сложения за единицу: $a + b = a\,\underline{1}\,b$ и условиться считать переход от сложения к умножению единичным, то умножение будет иметь вторую ступень: $a \cdot b = a\,\underline{2}\,b$. Использование одного и того же закона перехода от операции к операции, дает основание скачки ступени принимать за <u>единичные</u>. Однако скачки ступеней при различных видах рекурсии (основной и показательной) не будут тождественными - это первое. Второе, изменения ступени будут происходить и при переходах к обратным операциям данной ступени.

Проиллюстрируем эти высказывания на примере операции возведения в степень. Возведение в степень является операцией третьей ступени обобщения сложения: $a^b = a\,\underline{3}\,b$. От этого действия можно совершить четыре перехода: благодаря основной и показательной рекурсиям соответственно к слабой и сильной сверхстепени, и благодаря обратным оперонам, - к операциям корня и логарифма.

Действие 4-й ступени ${}^{b}{\cdot}a$ в терминах ступеней будет обозначаться так: ${}^{b}{\cdot}a = a\,\underset{\rightarrow}{4}\,b$.

Правая часть этой записи показывает, что данное действие ${}^{b}a = a\underset{\rightarrow}{4}b$ получено из предыдущего рекурсией в показатель (показывает стрелка). Записи $\log_b^a = a\,\overset{\rightarrow}{3}\,b$ и $\sqrt[a]{b} = a\,\overset{\leftarrow}{3}\,b$ показывают, что данные операции получены из действия 3-й ступени переходом к обратным действиям этих же ступеней (**у обратных действий подчеркивание и стрелки - сверху**).

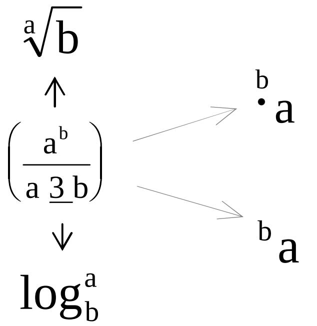


Рис. 1.1.8. Варианты преобразований прямого действия

Таким образом, мы принимаем гипотезу о том, что всякое действие с неоднородной структурой (т.е. с количественно различным вхождением чисел a, b и действий α, β, γ ... их соединяющих в одно целое) можно обозначать как действие некоей новой произвольно фиксированной ступени **μ:** $a\,\alpha\,b\,\beta\,a\,\gamma\,b \ldots \beta\,a = a\,\underline{\mu}\,b$.

В этом случае со ступенью бинарного действия можно «работать» как с математическим объектом-числом: повышать и понижать ее, и выполнять с ней различные преобразования. В общем случае от действия ступени $\underline{\alpha}$, как показали наши исследования, возможны с помощью следующих оперонов:

$\overset{\leftarrow}{P}^{+}(\alpha)$ и $\overset{\leftarrow}{P}^{-}(\alpha)$ -повышения и понижения ступени по основанию;

$\vec{P}^{+}(\alpha)$ и $\vec{P}^{-}(\alpha)$ -повышения и понижения ступени по показателю;

K- корня; L- логарифма - выполнения, как минимум, 6-и независимых друг от друга переходов к новым действиям (см. рис. 1.1.9).

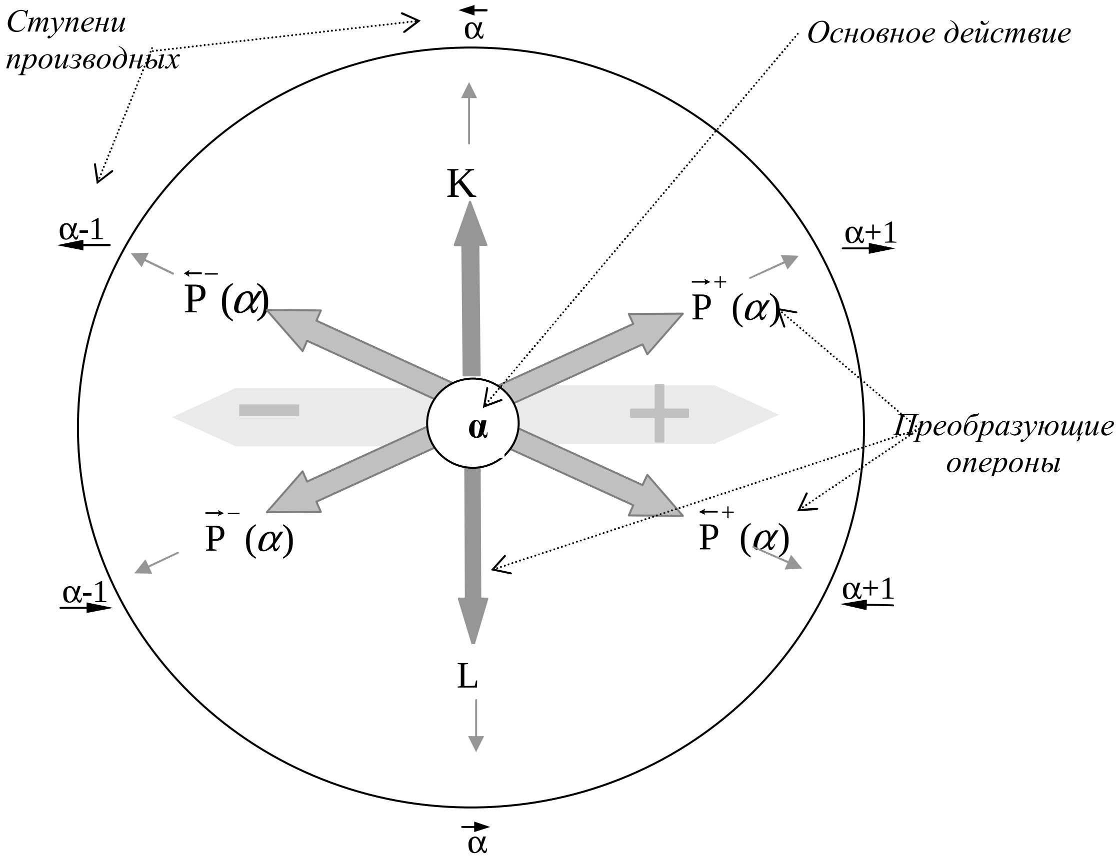


Рис. 1.1.9. Диаграмма получения новых независимых друг от друга *производных* действий из *основного* действия **α** с помощью оперонов P, K, L .

Варианты определений оперонов

В заключение этого краткого введения добавим, что выбранный способ обобщения бинарных действий не является единственно возможным, т.к. самозамыкание результата “c” в действии $a\,\underline{\alpha}\,b = c$ может осуществляться не только в основание или в показатель, но одновременно и в основание и в показатель, и многими другими способами. В общем случае другие возможные варианты самозамыкания при образовании новых действий удобно изобразить схематично. Отметим следующие их модификации, при условии использования различных пунктов замыкания (см. табл. 1.1.5).

Табл. 1.1.5

Пункты замыкани — Варианты замыканий

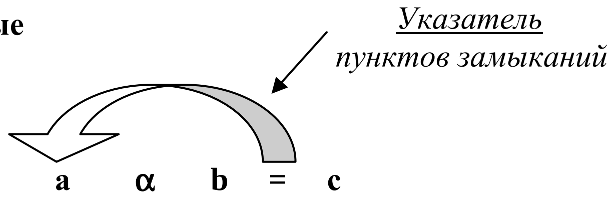
основание	**a**	……		……		……		……
ступень	**α**				……	…….	……	
показатель	**b**		……	……			……	……
виды оперонов		$\overleftarrow{P}$	$\overrightarrow{P}$	$\overleftrightarrow{P}$	$\overset{s}{P}$	$\overset{s}{\overleftarrow{P}}$	$\overset{s}{\overrightarrow{P}}$	$\overset{s}{\overleftrightarrow{P}}$

В ИД мы рассматриваем только опероны $\overleftarrow{P}$, $\overrightarrow{P}$ и, отчасти, $\overleftrightarrow{P}$. Хотя, конечно, *замыкание* можно мыслить и более дифференцированно, как *избирательно* упорядоченную структуру. В этом случае подстановка (самозамыкание) определенным образом последовательно упорядочена по адресам a, α, b. Тем самым в начале должно быть дано определение различным типам квантронов:

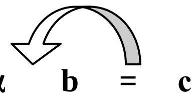
$$\overleftarrow{@},\ \overrightarrow{@},\ \overleftrightarrow{@},\ \overset{s}{@},\ \overset{s}{\overleftarrow{@}},\ \overset{s}{\overrightarrow{@}},\ \overset{s}{\overleftrightarrow{@}}\ .$$

Более подробно:

Монорекурсивные



$$\overrightarrow{@}\,(a\,\alpha\, b\,) \;=\; a\,\alpha\,(\,a\,\alpha\, b\,);$$



$$\overset{s}{@}\,(a\alpha b\,) = a\;\underline{(a\alpha b)}\;b;$$

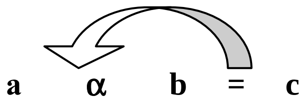
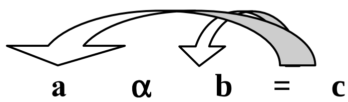


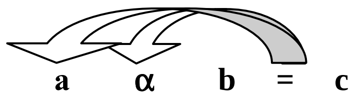
Рис. 1.1.10. а) Диаграммы получения различных квантронов

Бирекурсивные квантроны

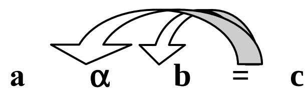
$$\overleftrightarrow{@}(a\alpha b) = (a\alpha b)\alpha(a\alpha b);$$



$$\overset{s}{\overleftarrow{@}}(a\alpha b) = (a\alpha b)\;\underline{(a\alpha b)}\;b;$$



$$\overset{s}{\overrightarrow{@}}(a\alpha b) = a\;\underline{(a\alpha b)}\;(a\alpha b);$$



Смешанный квантрон

$$\overset{s}{\overleftrightarrow{@}}(a\alpha b) = (a\alpha b)\;\underline{(a\alpha b)}\;(a\alpha b).$$

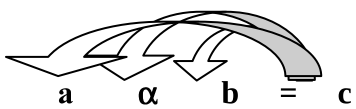


Рис. 1.1.10. б) Диаграммы получения различных квантронов

Проведенное нами исследование свойств действий в ИД касается только частного случая использования только полярных определений квантронов:

$$\overleftarrow{@},\ \overrightarrow{@}\ .$$

Ряды действий в этом случае названы **Ронами**, а их исчисление - **Рон-исчислением** (В сокращенном виде «Рон-исчисление» излагается в Приложении 1 данной книги).

3. Трансфинитные и финитные числа в сопоставлении

Лосев о числе и количестве

К концу XIX века Г. Кантор создает основы теории бесконечных множеств и тем самым, на наш взгляд, открывает дорогу к созданию нового, более совершенного мировоззрения и новых научных парадигм. Им были разработаны понятия о числах качественно новой природы – *трансфинитных ординальных и кардинальных числах*. Свойства этих чисел настолько сильно разнятся от свойств чисел финитных, что можно говорить о трансфинитном как антиподе финитного. Противостояние их свойств настолько велико, что до сих пор на наш взгляд не осмысленно достаточно глубоко ни математикой, ни философией, ни теософией, ни, тем более, физикой. Несмотря на это, теория множеств прочно заняла свое место в основаниях математики. К середине XX века, в особенности после работ Цермело, Гёделя, Коэна [2], была обоснована возможность создания новых, фантастических по своим свойствам теорий множеств (в частности с нарушением аксиомы выбора и континуум-гипотезы), так называемых нестандартных теорий.

Поиск смысла универсального и первородного общего для всего, осуществляется, как известно, через специфический процесс мышления, называемый абстрагированием, т.е. через восхождение от конкретного, индивидуального, частного к общему, т.е. к тому, что касается **всего**, ***а, следовательно, и является законом связи всего, - его смысловым первоисточником [24-27]. Погружение таким способом в смысловые глубины рано или поздно приводит, как мы уже говорили, к предельной грани смыслового различения вещей, а именно к бытию вещей в их взаимосвязи. Все должно Быть: осмысленное и бессмысленное, чувственное и сверхчувственное, субъективное и объективное, нечто и даже ничто. Родственным, объединяющим свойством всего этого набора полярных и многополюсных понятий есть*** **всеобщее бытия. Всеобщее Бытия –** ***предельная абстракция, всеохватывающая универсальность в освещении смысловых глубин. Как принцип она есть взаимосвязь всего со всем, как субстанция, в которой все имеет свое бытие. Вхождению в еще большие глубины абстракций препятствует возникновение небытия (понятия диалектически сопряженного с понятием бытия), а вместе с ним - бессмыслицы, фантасмагории Хаоса, Тьмы. Как известно, смысл формируется, прежде всего, через различие –*** *каков принцип различения таков и смысл*.

В таблице 1.1.6. представлена классификация основных понятий теории множеств, а именно понятий- **множество**, **порядковый тип** и **число** (мощность), в зависимости от использования при их определении тех или иных принципов различения элементов множества. В понятии множество, по умолчанию, используется вся полнота различий между элементами без каких-либо абстрагирований. *Единое* в понятии *множеств*о формируется при условии сохранения всех качественных различий между элементами, и это является основой определения этого понятия и начальной позицией для проведения последующих актов абстрагирования и получения благодаря этому новых понятий –порядкового типа и мощности.

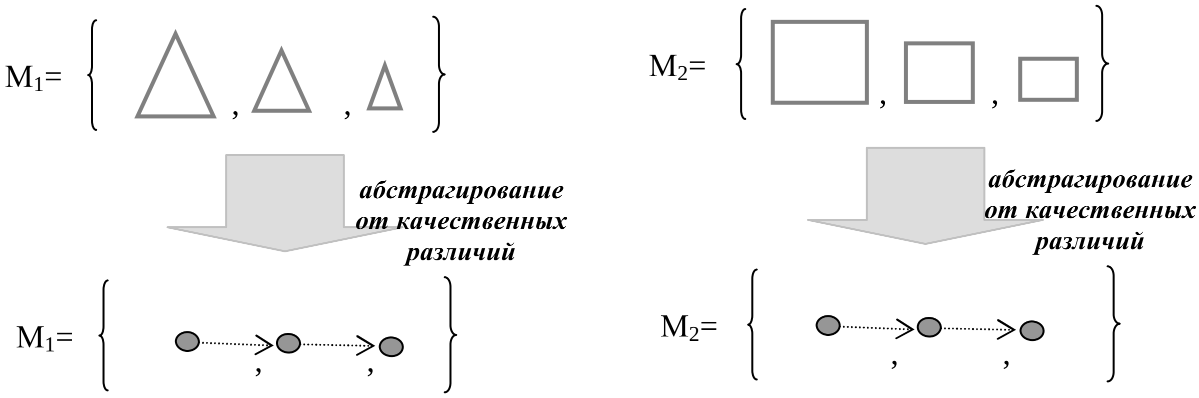
Табл. 1.1.6.

Определения понятий *числа, порядкового типа, множества*
в свете принципов различия.

Определяемые понятия⇒	***Множество***	***Порядковый тип***	***Мощность (число)***
Обозначение⇒	M	$\overline{M}$	$\overline{\overline{M}}$
Используемые ⇒ принципы различия элементов между собой	1. качество элементов 2. упорядоченность элементов 3. существование элементов	1. нет 2. упорядоченность элементов 3. существование элементов	1. нет 2. нет 3. существование элементов

Первый акт абстрагирования, предложенный Г. Кантором, состоял в отвлечении сразу от всех качественных различий между элементами. Это позволяло «обнажить», высветить второе универсальное признаковое пространство – порядковое. Характерные типы порядка формируются на основе самых разных идей порядка, связанных, например, с течением времени (выстраивающего своим течением последовательно упорядоченные ряды событий), или пространственных различий, также всегда имеющихся между элементами, и позволяющих вводить в рассмотрение отношения, основывающиеся на идее преимущества, предпочтения одних элементов по отношению к другим. Наипростейшими (логическими) из них являются – отношения следования, больше/меньше и т.п.

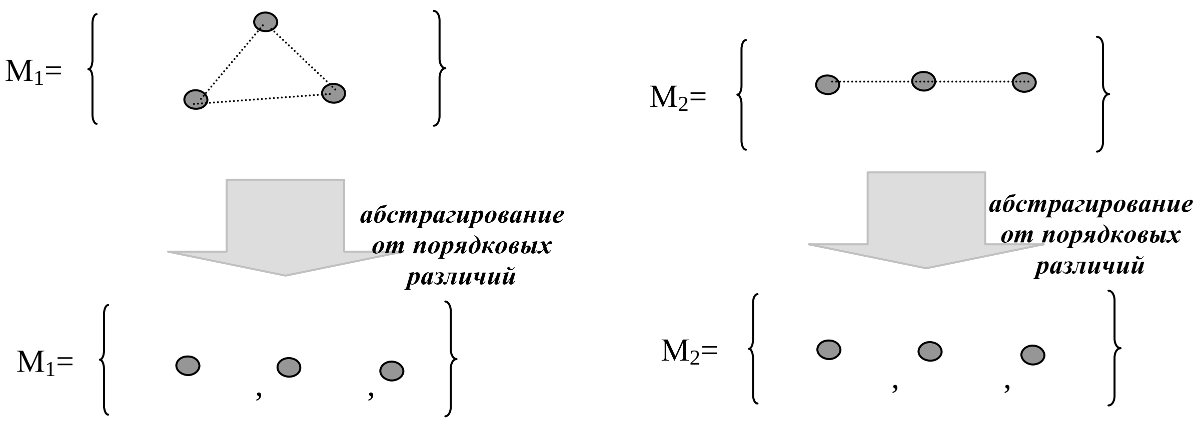
$M_1 \neq M_2$



В этом случае $M_1 \neq M_2$, *но* $\overline{M_1} = \overline{M_2}$

а) пример неравенства множеств и равенства порядковых типов.

$\overline{M_1} \neq \overline{M_2}$



В этом случае $\overline{M_1} \neq \overline{M_2}$ *, но* $\overline{\overline{M_1}} = \overline{\overline{M_2}} = 3$

б) пример неравенства порядковых типов и равенства мощностей.

Рис. 1.1.11. Различные множества и порядковые типы одной и той же мощности.

Понятийные категории, связанные с определением понятия числа, основательно и всесторонне исследованы А. Ф. Лосевым. Как последовательный диалектик, он рассматривал единство бытия (*Б*) и неизбежно сопутствующего ему небытия (Z*Б*) в различных аспектах. Т.к. (*Б*) и (Z*Б*) друг без друга не мыслимы, то Лосев предлагает оперировать с ними, как с неким целым смысловым объектом: ((*Б*) и (Z*Б*)), т.е. как с двумя элементами, соединёнными логической операцией «И» (а не «ИЛИ») в одно целое.

Этот понятийный дуэт противоположностей может быть рассмотрен в различных аспектах смыслового равновесия. Лосев утверждает, что единство ((*Б*) и (Z*Б*)) в зависимости от их взаимного равновесия можно видеть в различных аспектах, и тогда:

в аспекте бытия оно есть **число**;
в аспекте небытия оно - **инобытие** (принцип ипостасийности);
в равноприсутствии оно - **граница** (относительно друг друга);
в целом - **становление**.

Из этого, конечно, следует, что все четыре понятия, вытекающие из совместного рассмотрения бытия и небытия, являются принципиально фундаментальными для осмысления вообще всего сущего, т.к. всё сущее и ипостасийно, и соразмерено числом, и имеет границы, и движется. При этом в отношении числа, Лосев замечает, что «… число есть самое первое и самое основное оформление вообще. В сущности, тут даже ещё нет никакой формы, пространства, а только самый принцип формы, потому что всякая форма основана на расчленениях и объединениях, а они не могут существовать без категории числа». Кроме того, в отношении понятия Числа Лосев делает ещё одно чрезвычайно важное для понимания природы актуальной бесконечности уточнение. Он состоит в том, что **число – до качества**, что «число первооснова качественного оформления вещей, т.е. первооснова смыслового и чувственного оформления вещей ([24], с.458)». Это означает, что число в отношении категории качества является родовым понятием, универсалией высшего порядка: «… число не после качества, но предшествует всякому качеству или, по крайней мере, сопровождает его. Вот почему невозможно говорить о переходе качества в число, но только о переходе качества в количество(!) ибо качество само по себе немыслимо без числа, а количество действительно возникает после качества, также оно есть число само по себе, независимое ни от какого качества, но оно есть сосчитанность чего-то качественного. Количество есть именованное число, т.е. оно, не будучи само качеством всё же сосчитывает те или иные качественные моменты ([24], с.423)».

Такое понимание различий понятий *числа и количества* полностью совпадает с позицией Г. Кантора, которую он занимает в определении понятия **мощность** (число). Мощность в его определении есть то, что остаётся после абстрагирования на множестве элементов от качественных различий между ними, а затем и от порядковых (т.е. фактически от пространственных, временных и логических отношений диспозиций элементов относительно друг друга.) Этот последовательно выполняемый акт двойной абстракции при формировании понятия числа на некотором множестве элементов М. Кантор записывал в виде:

$\overline{\text{M}}$ - первая абстракция (от качества) - получение порядкового типа,

$\overline{\overline{\text{M}}}$ -второй акт абстракции от порядковых различий между элементами множества М, в результате которого и получаемся определение собственно самого числа.

Табл. 1.1.7.

О тождестве понятий ***количества и порядкового типа*** *в финитной области в свете принципов различия между элементами.*

Понятия	***Порядковый тип***	***Количество (число)***
Обозначение	$\overline{\text{M}}$	$\overline{\overline{\text{M}}}$
Принцип различия элементов между собой	**1. нет** **2. упорядоченность элементов** **3. существование элементов**	**1. качественные различия элементов** **2. нет** **3. существование элементов**

Г. Гегель [«Наука логики» М., «Мысль», т.1, 1971] не различал число и количество, точнее считал понятие - **конечное число** - тождественным понятию **количество**. Такое не различение этих понятий совершенно не приемлемо для построения системы исчисления трансфинитных чисел, т.к. подлинное определение числа, тождественно у Кантора понятию **мощности** множества[16].

Различение количества и числа основывается на реализации двух принципиально различных подходов к установлению равномощности (равночисленности) двух множеств. **Первый** состоит в сосчитывании элементов сравниваемых множеств путем последовательного перебора их элементов (тем самым в отношения порядка между элементами, вносится дополнительный элемент временного характера). **Второй** состоит в установлении взаимно однозначного отображения одного множества элементов на другое. Во втором случае последовательного перебора нет. Счет, последовательный перебор предполагает на свою реализацию затраты времени, и потому неприменим для подсчета элементов бесконечных множеств, т.к. требовал бы для своей реализации бесконечного времени. Напротив, отображение, выполняемое с помощью той или иной функции, - «мгновенно», и потому оказывается приемлемым для численного сравнения элементов именно бесконечных множеств.

Свойства трансфинитных чисел в сопоставлении с финитными

Что означает «быть бесконечным», или хотя бы иметь какое-либо одно бесконечное свойство? Что означает само понятие бесконечности?

Положительными и определенными ответы на такие вопросы оказались возможными только после работ Г. Кантора, который разработал теорию бесконечных множеств, открыв способы их сравнения, сопоставления и счета.

Прежде всего, Кантор строго отделил понятие актуальной бесконечности от понятия потенциальной, несобственной бесконечности, которое является по сути дела некоей переменной величиной, безгранично возрастающей сверх всяких границ [18]. В потенции, в **возможности** безграничного роста такая переменная величина бесконечна, но, если её движение роста остановить, то в результате будет получаться хотя и очень большое, но все же конечное число. В высшей математике такой процесс и обозначается, как именно стремление к бесконечности: $\mathbf{x\to\infty}$ Поверженная восьмерка «∞» является символом такой, как ее назвал Кантор, не собственно бесконечности.

Главным результатом работы Кантора было открытие **разных** актуальных бесконечностей, что открывало в разработанной им алгебре трансфинитных чисел возможность различных математических манипуляций с ними, возможность изучения их свойств. Если бы такого различения не было, то и разговаривать было бы вообще не о чем, так как до Кантора все было едино: что бесконечность потенциальная, что актуальная, что, наконец, Абсолютная, - все было непонятно, и погружено в непроницаемый туман неразличимости и, следовательно, отсутствие смысла.

Правда, мудрецы древности всех времен и всех народов своим духом, интуицией проникали к ощущениям присутствия бесконечности в мире и, так или иначе, выражали это, но только в поэтических или философских произведениях. Но разуму же, непротиворечивому мышлению, и, следовательно, математике - бесконечность была недоступна. А если и предпринимались попытки постичь ее (Зенон VI до РХ), то приводили, как известно, к антиномиям, противоречиям и парадоксам.

«Столкновение» с бесконечностью во все времена вызывала недоумение. К моменту начала деятельности Кантора она уже производила на пытливые умы действие horor infinifi (ужас бесконечности (лат.)) именно из-за «неперевариваемости» разумом, логикой, рассудком.

Суть деятельности Кантора состояла, прежде всего, в том, чтобы резко противопоставить финитные (конечные) и трансфинитные (бесконечные или, дословно, сверх конечные) числа[17]. Очень многие недоумения возникали именно из-за переноса свойств финитных чисел на трансфинитные или простого их смешения. Если же такого смешения понятий не допускать, то смысловая ситуация уравновешивалась, и то, что нельзя приписать финитным числам, то вполне и не противоречиво возможно для трансфинитных.

[16] В отношении этого понятия Гегель не достиг понятию числа соответственной глубины абстракции, точнее, по-видимому, не придал этому должного значения

[17] transfinitum - бесконечность (лат)

Что же есть трансфинитные числа, и каковы их свойства? На этом вопросе необходимо остановиться, чтобы затем перейти к обсуждению вопроса об их отношении к субъективной и объективной реальности.

Хорошо известный нам натуральный ряд чисел 1,2,3,4,…n … (обозначается N^+) при первом знакомстве с ним не таит в себе никаких неприятностей - прост, удобен и понятен. (Как позже выяснится, что и это первое впечатление тоже обманчиво!). Во-первых, у него нет конца. Он имеет границу с одной стороны (в данном случае слева). Граница справа отсутствует? Ее нет!!! Там зияющая дыра…, «черная дыра». Ряд безграничен, бесконечен!

«Тихий и скромный» ряд N^+ оказывается, обладает свойством бесконечности, если его взять в <u>целом</u> <u>весь</u> без остатка, т.е. во всей его бесконечной полноте. Как это сделать? А нужно прекратить процесс порождения все новых его элементов прибавлением единицы ($a_{i+1}=a_i+1$) и «перемахнуть» сразу через весь ряд. Нужно отдать должное мужеству Г. Кантора за то, что он не побоялся это сделать.

Итак, перепрыгнув через все конечные числа, он предложил ввести число качественно новой природы, которое он назвал трансфинитным и обозначил через ω, и поставил его в «конце» всего натурального ряда:

$$\underbrace{1\quad 2\quad 3\quad 4\,.\,.\,.\,.\,.\,\infty\,.\,.\,.\,.\,.}_{\substack{\text{область}\\ \text{финитных}\\ \text{чисел}}}\Big|\underbrace{\qquad\omega\qquad\qquad}_{\substack{\text{область}\\ \text{трансфинитных}\\ \text{чисел}}}$$

Позже он показывает, что из всех трансфинитных чисел ω есть наименьшее. И если на него глядеть из области финитных чисел, то оно представляется чудовищно большим, а если со стороны чисел, уходящих в своем стремлении к Абсолютному, то исчезающе малым.

Остановимся более подробно на двух существенных различиях свойств финитных и трансфинитных чисел. Первое из них связано с тем, что в области конечных чисел порядковые и количественные числа совпадают, неразличимы. То есть, если, например, в процессе счета элементов финитного множества (т.е. следования вдоль элементов множества по порядку) получено число 100, которое есть отражение порядка счета, то количество элементов этого множества также принимается равным 100. Для трансфинитных множеств ситуация иная. Порядковые и количественные числа выполняют по отношению к ним совершенно различные функции, и при этом не совпадают друг с другом.

Приведем соответствующий пример. Пусть задан натуральный ряд. И из него выбраны последовательным перебором ω чисел. Ничто не мешает далее продолжать этот процесс счета, и образовывать новый ряд чисел (*используя прием перебора и факт безграничности ряда*); в этом случае будет получено следующее множество различных трансфинитных порядковых чисел:

$$\omega+1,\ \omega+2, \omega+3,\ \ldots\ \omega+\omega,\ \ldots\ 3\omega,\ \ \ldots\ \omega^2,\ \ldots\ \omega^{\omega}\ \ldots\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}\ \ldots.$$

Что можно сказать о количестве элементов тех упорядоченных множеств, которые описываются, например, следующими порядковыми числами:

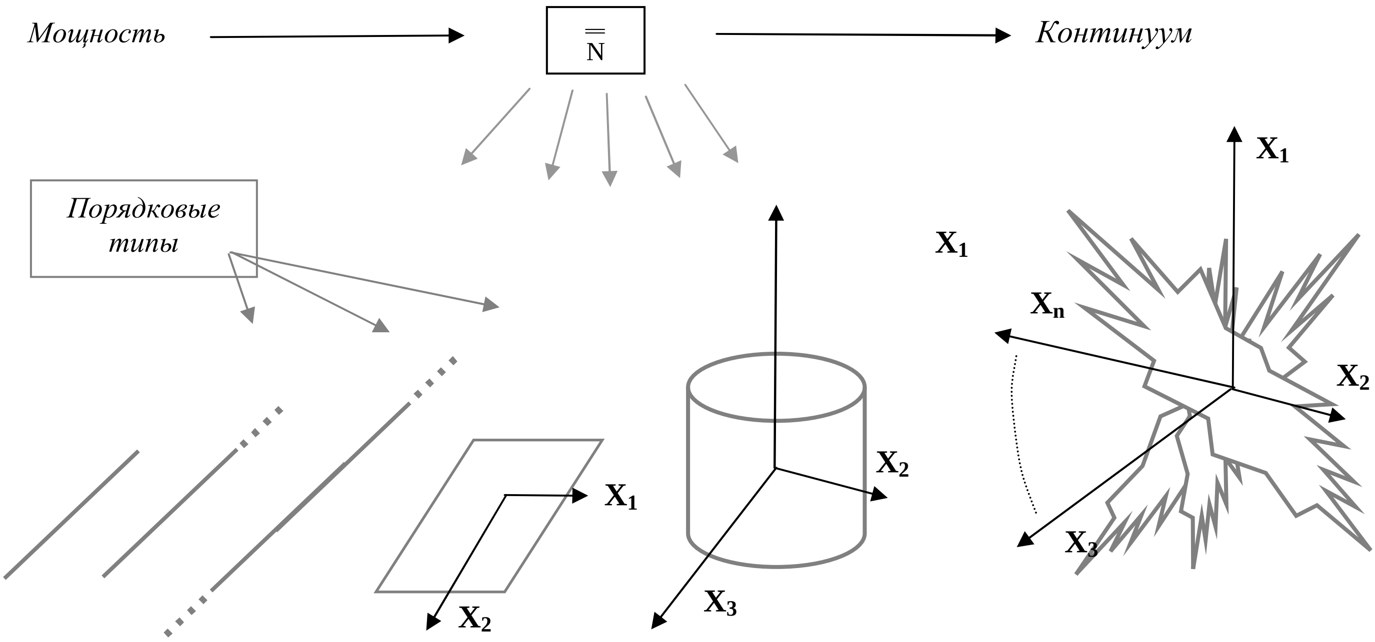
$$\omega+1,\ 3\omega,\ \omega^2,\ \omega^{\omega}\ .$$

«Внешне», формально, эти числа существенно отличаются друг от друга, но, если отвлечься от признака порядка, на основе которого они и определены, то оказывается, что они являются порождением одного и того же бесконечного числа, одной и той же трансфинитной мощности, равного количеству элементов натурального ряда в целом и обозначаемого $\overline{\overline{\mathrm{N}}}$. Мощности всех их будут равны:

$$\overline{\omega+1}=\overline{3\omega}=\overline{\omega^2}=\overline{\omega^{\omega}}=\overline{\overline{\mathrm{N}}}\,.$$

Здесь черта сверху означает акт абстрагирования (отвлечения) от порядка, необходимый для установления факта равномощности.

Другой пример. Следующим, ближайшим к трансфинитному числу *а* является число *с*, являющееся мощностью всех действительных чисел, и в геометрической интерпретации представляет из себя непрерывное множество, континуум точек. Оно также допускает следующие типы порядка, (то есть следующие порядковые числа):



Количество» точек во всех этих геометрических объектах одинаково
и равно мощности континуум -*с.*

Рис. 1.1.12. Различные *порядковые типы* одной и той же мощности.

Вторым не менее разительным отличием финитных и трансфинитных множеств, является как бы нарушение фундаментального закона в отношениях целого и части. А именно то, что целое равно части. Для конечных множеств (из-за наличия у их элементов качественных различий, придающим им четкие и ясные границы) это всегда так. Для бесконечных - нет. Для «бесконечных» часть может быть вполне в количественном отношении равной целому множеству.

Пример 1. Имеем полный натуральный ряд N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, … }, и множество простых чисел P = {1, 2, 3, 5, 7, 13, … }. Простые числа составляют правильное подмножество от N, но как трансфинитные числа – они равны. Их одинаковое количество! Т.е. несмотря на то, что $N \neq P$ и $P \subset N$ все же $\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{P}}$.

Пример 2. Для двух линейных точечных отрезков $a \subset b$:

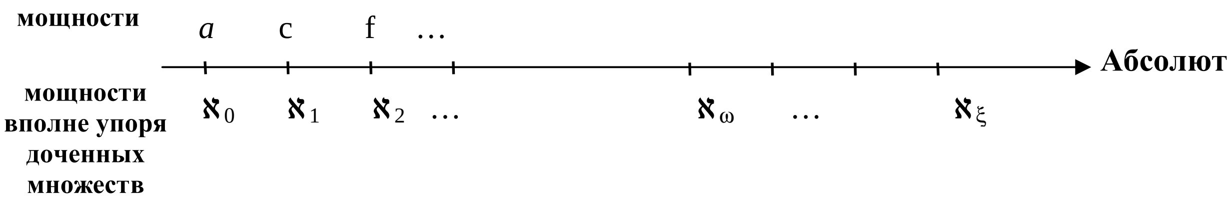
Для двух линейных точечных отрезков $a \subset b$

Каждой точке x можно сопоставить во (взаимно) однозначное соответствие точку y

Рис. 1.1.13. Различные порядковые типы одной и той же мощности.

Каждой точке x отрезка можно сопоставить y, во (взаимно) однозначное соответствие, и, следовательно, установить их количественную эквивалентность, т.е. равномощность.

Таким образом, шкала трансфинитных чисел, начинаясь с наименьшего трансфинитного числа $\aleph_0$, уходит в бесконечность; точнее движется на встречу абсолютному.



По поводу Абсолюта Г. Кантор говорил, что Он не поддается математическим определениям, и должен познаваться другими сверхразумными, «трансцендентальными» средствами. Напротив, *трансфинитное* поддается определениям и счету, и потому вполне подлежит исследованию и является более адекватным средством познания феноменов, как полагал Г. Кантор, психики и явлений жизни [18].

Имея ввиду эти предметы, далее необходимо обсудить возможность осуществления *отображения того или иного действия в трансфинитную область*, как основы для установления соответствия между *конечным и бесконечным*.

От различия к единству конечного и бесконечного

Попытаемся дать обоснование зрелости попытки объединения понятий конечного и бесконечного в единую систему знания. Для этого рассмотрим этапы развития интеллектуальной деятельности в какой-либо предметной теоретической области. Во временной последовательности они следующие:

1. Формирование первых понятий и основных определений той или иной предметной области, получение первых теорем, то есть получение первых логических следствий. В этом случае опора сознания, создающего систему понимания предмета, опирается на интуицию, некую интегральную разумную «очевидность», предшествующую опыту в обобщенном цельном виде. На этой ступени происходит дистанцирование изучаемой предметной области от других по своим методам, принципам, логике. Происходит введение новых понятий, осуществляется преодоление «инерции» мышления, происходит осознание накопленного вредного опыта из других теорий и парадигм.

2. Получение логических парадоксов, антиномий, апорий, связанных с несовершенством определений исходных понятий, делающих непротиворечивое мышление предмета невозможным. На этом этапе возникает необходимость в сужении круга используемых понятий, производится пересмотр определений, то есть происходит осознание необходимости в построении знания в виде аксиоматической теории.

3. Построение знания в виде аксиоматической теории, обоснования ее полноты, непротиворечивости, поиск изоморфности каким-либо другим уже «проверенным» теориям.

4. Доказательство средствами математической логики независимости отрицания некоторых аксиом (как правило, так или иначе связанных с актуальной бесконечностью) от других. Построение новых теорий на других аксиоматических основах.

5. Получение внешних интерпретаций теорий в стандартных или нестандартных вариантах, а именно внутри самой математики, физики, астрономии, биологии и т. п.

6. Возвращение к исходному пункту предметной области, с целью соединения в целое того, что ранее разъединялось, и направлялось на максимально ясное вычленение и выделение этих различий.

В качестве конкретного примера приведем в сравнении этапы становления таких наук как геометрия и теория множеств (см. табл. 1.1.8.):

Табл. 1.1.8.

Этапы развития	***Предметная область***	
	Геометрия	***Теория множеств***
1. *Первые определения и теоремы*	Евдокс Пифагор	Г. Кантор
1. *Обнаружение парадоксов интуитивной теории*	Зенон	Б. Рассел
2. *Построение аксиоматической теории*	Евклид	Цермело Френкель
3. *Построение нестандартной аксиоматизации*	Н. Лобачевский Б. Риман	П. Коэн
4. *Интерпретации в других областях*	Г. Минковский (физика) А. Эйнштейн (физика)	?
5. *Возвращение к исходному пункту. Создание синтетических понятий и методов.*	?	?

Это сравнение позволяет сделать заключение, что теория множеств в течение почти ста лет, как наука, оказалась развитой достаточно глубоко (до уровня нестандартной теории), и что сегодня она является фундаментальным теоретическим знанием. Она оперирует с одной стороны с самыми абстрактными понятиями, такими как числа и функции, множества, и с другой стороны связывает эти понятия с первичным признаковым пространством качественных различий элементов различных множеств.

Методы теории множеств прочно захватили свое место в области оснований математики: логики, топологии, теории чисел, теории функций и т. п. и постепенно вместе с другими прикладными ветвями математики проникают в другие области знания. И только один вопрос из теории множеств остался незатронутым в явном виде – это вопрос об интерпретации актуальной-бесконечности, т.е. кардинальных и ординальных чисел.

Сопоставим принципы порождения и стеснения, используемые при определении финитных и трансфинитных чисел. Г. Кантор, *определяя число* (мощность), проводит его в восхождении по ступеням абстрагирования в три этапа:

1. **Изначально он требует ясного различения** между собой для всей совокупности элементов e_1, e_2, e_3, … e_i … множества М. (Наиболее естественно это делать на основе качественных и порядковых признаков. В этом случае единомножество *в целом* $M = \{e_1, e_2, e_3, \ \dots \ e_i \dots\}$ предстает перед нами как *множество.)*

2. **Далее выполняет абстрагирование от качественных признаков различия** между элементами, сохраняя только порядковые различия в межэлементных отношениях. Условно это обозначается так:

$$\overline{M} = \overline{\{e_1, e_2, e_3, \;\ldots\; e_i \ldots\}}$$, и приводит к понятию - ***порядковый тип***.

3. В заключение Г. Кантор, проводит **абстрагирование и от порядка** (или порядковых отношений между элементами), которое завершает образование понятия, так сказать, чистого количества, когда из всех свойств элементов остаются только те, которые только позволяют различать элементы множества относительно друг друга. Признаки порядка из рассмотрения устраняются. Формально эта интеллектуальная процедура двойной абстракции обозначается им двумя чертами:

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{\{e_1, e_2, e_3, \;\ldots\; e_i \ldots\}}}$$, -приводит к понятию ***мощность***.

Таким образом, в признаковом пространстве образов сознания можно выделить три большие области. К ним относятся:

1. Качественные признаки, формируемые на основе деятельности физических органов чувств: осязания, вкуса, зрения, слуха, обоняния (следовательно, возможно поэтапное абстрагирование от признаков соответственно осязания, вкуса, зрения, слуха, обоняния, -пока не будут уничтожены все признаки сенсорных систем внешнего восприятия);

2. Качественные признаки, формируемые в результате разумной, интеллектуальной деятельности, зафиксированной в соответствующих определениях и понятиях. К ним, например, можно отнести, следующие группы понятий:
   - Первичные, неопределимые понятия;
   - Понятия, которым даны определения (в том числе величины);
   - Интуитивно ясные понятия логической сферы разумной деятельности: отношения; признаки существования и т.п..

3. Качественные признаки, формируемые в результате деятельности духовной интуиции.

В некотором упорядоченном виде они собраны в табл. 1.1.9.

Табл.1.1.9.

	Название класса признаков
Сенсорная система восприятия (телесные чувства) *(перцепция внешнего мира)*	Осязание Вкус Зрение Слух Обоняние
Интеллектуальная разумная сфера *(смысловое «пространство»*, метауровень чувств)	Имена Определения Логические понятия Отношения
Интуитивно-духовная сфера сознания *(метауровень смысла)*	Абстрагирование (соединение), истинность, различение добра и зла, различение духов

Исходя из этого, мы полагаем, что Число, как понятие, в своей сущности отражает предельное состояние знания чего-либо, достижимого путем абстрагирования, универсализации. Его формирование завершается обращением к духовной основе деятельности сознания, т.е. к интуитивному использованию признаков бытия или небытия, существования или не существования.

Выводы:

— Абстракцией устанавливаются признаки универсальности, общности, единства. Следовательно, в понятии числа достигается предельная идея единства, которая доступна вообще разумно-смысловому способу познания;

— Отношение порядка – это предпредельное состояние познания, достигаемое на основе восприятия тех или иных видов преимуществ, субординаций наличествующих в отношениях между объектами познания. (Аксиома выбора, введеная Цермело, в этом отношении имеет огромное значение!);

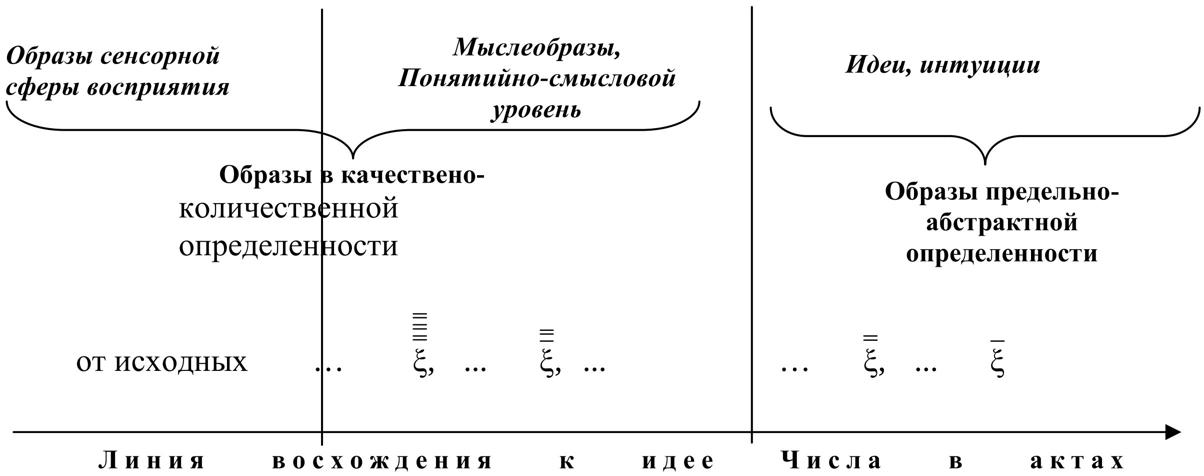


Рис. 1.1.14. Схема абстрагирования (восхождения) к идее Числа.

— Познание, осуществляемое с использованием предельных абстракций числа и порядка (порядкового числа) есть постижение единства всего окружающего. Основы для такого постижения создаются, прежде всего, в математике. А в учении о трансфинитном числе – Кантора, и в учении о мировом порядке – Цермело (см. работы по аксиоме выбора) эти средства получили в своем развитии качественный скачок.

— Интуиция – метауровень для всей разумной сферы знания; разум - метауровень для всей чувственной области знания.

— Отношения порядка (см. рис 1.1.14.) можно вводить на основе признаков порождаемых чувственной, мысленной и интуитивной сферами сознания.

Все эти виды признаков-образов Кантор разбил на три большие группы: признаки существования, порядка и качественных различий.

Порождение и стеснение при образовании понятий о finitum и transfinitum

Всякое новое финитное число с можно рассматривать как результат, порождаемый тем или иным действием, называемым арифметической операцией:

$$a \underset{\leftarrow}{\alpha} b = c$$

Простейшей из них является операция следования Пеано:

$$f_2 = f_1 + 1.$$

Ее обобщение приводит к более сложной форме действия - современной <u>бинарной</u> арифметической операции - сложению:

$$f_3 = f_2 + f_1 \ .$$

Последовательное циклическое замыкание действия в себя приводит к размножению чисел:

$$f_3 = f_2 + f_1, \quad f_4 = f_3 + f_2\,, \qquad \ldots \qquad f_n = (((f_2 + f_1 + f_2)\ \ldots\ ) + f_1$$

Это замыкание можно продолжить до бесконечности. И его следует <u>финитно</u> (то есть через конечное число шагов) прервать, и произвести «свертку» (останов процесса размножения операндов действия, - своеобразное *финитное* стеснение). Это позволяет обеспечить возврат к исходной форме - бинарному действию:

$$f_3 = f_2 * f_1.$$

В этом состоит суть финитного «стеснения»! Оно дает возможность определить новую операцию с качественно другими свойствами. Происходит скачок свойств, непрерывность нарушается, прерывается скачком.

Итак: 1 шаг – порождение новых чисел (того же качества, но отличного по модулю от исходных) циклическим автозамыканием;

2 шаг - финитное прерывание цикличности; свертка в прежнюю форму (то есть возврат в исходный пункт к форме бинарного действия).

Однако в свернутом состоянии бинарное действие еще не вполне бинарно, *лишь только обратное действие* - *бинарно, причем не только по форме, но и по содержанию*, именно оно наиболее сходно своей «бесструктурностью», своей «монадообразностью» с исходным бесструктурным базовым действием.

Имея в виду модель финитных принципов порождения, мы теперь можем иначе взглянуть на прием Кантора, называемый трансфинитной индукцией, и заключить, что он с целью завершения, предложил не прерывать финитный цикл порождения все новых и новых чисел, а качественно иначе, т.е. трансфинитно его завершать!

$$f_1 + 1,\ \ f_1 + 2,\ \ f_1 + 3, \quad \ldots \quad f + f_\nu, \quad \ldots \quad + \quad f + \lim_{\nu \to \infty} f_\nu \ .$$

Применяя этот принцип, Кантор получает число: $\omega = \lim\limits_{\nu \to \infty} f_\nu$, следующее, как он полагал за всеми конечными числами.

Обратим внимание на то, что в таким «порождением» невольно вводится идея порядка, следования, и что число ω становится при этом более сложным, гибридным, синтетическим понятием, «гибридным» числом. Оно становится числом иной, особой природы, в котором соединяются воедино две идеи, порядок и мощность. Если в таком числе отвлечься от порядка, то получится мощность натурального ряда: $\overline{\omega} = \aleph_0$.

Далее комбинируя финитную и трансфинитную индукции (порождения), можно получать иерархии различных трансфинитных порядковых чисел:

$$\omega + 1,\ \omega + 2, \omega + 3,\ \ldots\ \omega + \omega\,,\ \ldots\ 3\omega\,,\ \ \ldots\ \omega^2,\ \ldots\ \omega^\omega\ \ldots \omega^{\omega^{\omega^\omega}} \ldots.$$

Эскалация безгранична. Наращивание уничтожает ограниченность, а, следовательно, и определенность! Возникает потребность в стеснении (в движении в обратную сторону!), в завершении движения к Абсолюту на каком-то промежуточном этапе. Так как

$$\overline{\omega + 1} = \overline{3\omega} = \overline{\omega^2} = \overline{\omega^\omega} = \alpha,$$

то все порядковые числа – ординалы оказываются ограниченными в своем определении по мощности. Отсюда следует вывод, что для продолжения построения высших порядковых чисел нужно использовать другие высшие мощности. Фазы этого процесса приведены в табл. 1.1.10.:

Таким образом, последовательность получения новых в качественном отношении чисел следующая:

1. порождение: финитное и трансфинитное;
2. стеснение: прерывание цикличности – однородность;
3. переход к собственному бинарному действию: обратному;
4. получение новых чисел.

Сравнение принципов порождения и стеснения для финитной и трансфинитной областей

Табл. 1.1.10.

финитной	*трансфинитной*
1. Определение прямого действия (однократное отрицание) $a\ \underline{s}\ b = c$ 2. Циклическое автозамыкание (многократное отрицание, представление многократного $a\alpha a$ $(a\alpha a)\alpha a$ $\vdots$ $\underbrace{((a\alpha a)\alpha a)\alpha a....\alpha a}_{b}$ 4. *Финитное* прерывание (введение однородности, иерархичности, ступени) $\underbrace{(((a\alpha a)....\ \alpha a)\alpha\ \ a)\alpha a}_{b} = a\underleftarrow{\beta}b$ 4. Переход к обратным действиям: $b\overleftarrow{\alpha}a = \overset{\alpha}{\sqrt[b]{a}}$ и $b\overrightarrow{\alpha}a = l\alpha g_a b$. 5. Получение качественно новых чисел с использованием обратных действий при a>b, или при варьировании качеств чисел a и b:	1. Порождение новых чисел финитной и трансфинитной индукцией: fin.: a+1, a+2, …a+f transfin.: $f + \lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu$ 2. Получаем шкалу порядковых типов, ординалов: $\omega+1,\ \omega+2,\ \dots\ ,\ \dots\ 3\omega,\ \ \dots\ \omega^2,\ \ \dots\ \omega^\omega\ \dots\omega^{\omega^{\omega^\omega}}\ \dots.$ но (здесь начало стеснения): $\underbrace{1,2,\dots i,\dots\ \omega+1,\ \dots 3\omega,\dots\omega^\omega\ \dots\omega^{\omega^{\omega^\omega}}\ \dots.}_{\overline{\omega} = \aleph_0}$ все они имеют предельную трансфинитную константу $\aleph_0$, которая и накладывает на них предел, ограничение и тем самым полагается возможность его последующего снятия с помощью другого трансфинитного числа $\aleph_1$: $\underbrace{\underbrace{1,2,\ i,\dots\ \omega+1,\ \dots 3\omega,\dots\omega^\omega\ \dots\omega^{\omega^{\omega^\omega}}\ \dots.}_{\overline{\omega} = \aleph_0}\ \ \Omega\ \ \dots\ \ \Omega^\Omega\ \dots}_{\overline{\Omega} = \aleph_1}$

Диалектика развития трансфинитных методов, на наш взгляд, основана на удачном методе Г. Кантора соединения в единое целое двух взаимно отрицающих друг друга приемов стеснения и «раскрепощения»:

Вектор Одного направления	*Вектор Противоположного направления*
Ограничение, стеснение	Снятие ограничений Уничтожение стеснения
Полагание границ	Выход за пределы ограничений

4. Трансфинитная нумерация действий

В 1963-64 гг. после работ П. Коэна [2,3,20] по обоснованию возможностей существования нестандартных теорий множеств стало ясно, что возникла развитая и мощная математическая наука - теория множеств - в стандартном (Г. Кантор) и нестандартном вариантах (П. Коэн). Свойства бесконечных множеств пугают, и, кстати, пугают не только обывателей, но и самих математиков. Трансфинитные числа фактом своего существования начали настойчиво „кричать", что мир, если его пытаться увидеть в свете этих новых понятий, на самом деле совсем не такой, каким мы себе его представляли в наших моделях с обычными финитными числами.

Актуальная бесконечность, появившись, потеснила однозначность, привычную определенность, внешнюю логичность математических построений, и, казалось бы, вырвала у математики главный приоритет в создаваемых ею знаниях - точность и однозначность. Таким образом, кульминационный пункт в развитии понятия числа, объяснив многое в самой математике, а именно в её основаниях, касающихся теории чисел, топологии, теории функций – создал при этом одну большую проблему, связанную с интерпретацией трансфинитных чисел и общим пониманием устроения Мира.

В предыдущем рассмотрении мы выяснили, что *действие* над числом при определенных условиях способно порождать качество. Именно это порождение происходит при переходе к обратному действию той же ступени и проведению его тогда, когда показатель меньше основания (бинарного действия). При этом, как это традиционно сложилось, знаком качественной определенности выбирается именно само это действие, которое и порождает данное качество числа. И чем дальше мы идем по ступеням преобразований исходного базового действия, тем сильнее и ярче оказываются подобные качественные скачки.

Диаграммы преобразований действия α *до качественного скачка в порождаемых им числах с помощью оперонов* P, K, L :

K(α)	L(α)
KP(α)	LP(α)
KPP(α)	LPP(α)
KP...P(α)	LP...P(α)

Диаграммы самозамыкания на предыдущие качества. Подстановка в корень или логарифм чисел предыдущих качеств, полученных ранее с помощью действий низших ступеней:

$$K(-1)\ \underline{\alpha}\ b;\ K(m/n)\ \underline{\alpha}\ b$$

Однако, надо полагать, потенции к качественному скачку, должны быть уже в скрытом виде заложены в прямом действии той же ступени.

Раскрытие смысла этой гипотезы и наполнение её конструктивным содержанием состоит в использовании идеи о *трансфинитном*.

Как мы ранее видели, *оперон*, как преобразователь действия, есть ограниченная или завершенная композиция квантронов:

$$P(\alpha) = \underbrace{@@@\ldots@}_{b-2}(\alpha)$$

Такое завершение можно понимать двояко: как финитное, и противопоставляемое ему другое возможное завершение- трансфинитное. А именно:

$$\underbrace{@@@\ldots@}_{\aleph}(\alpha) = \overline{@}^{\aleph}(\alpha)$$

Это говорит о том, что снятие „дурной" бесконечности размножения (становления) можно осуществить не только завершением финитным способом (ограничением), т.е. с помощью останова процесса повторного применения квантрона финитного числа раз. Но самый главное состоит в том, что **процесс повторения возможно завершить принципиально иным - трансфинитным способом**, используя для этого некое произвольное кардинальное число $\aleph_{\xi}$.

Понятно, что и в том и в другом случае процесс завершается, как бы переходит в «статическое» состояние, но, разумеется, с существенно разным смыслом получаемого в том и другом случае результата.

В первом случае получаем качественный скачок, касающийся структуры действия и выражающийся в переходе от действия α к высшему действию β. Во втором случае, если квантрон замыкаем не (b –2) раза, а $\aleph_\xi$ раз, (т.е. повторение „ограничиваем” в бесконечности), то получаем в результате трансфинитное число:

$$\mathrm{P}^{\aleph}(\alpha) = \underbrace{@@@\ldots@}_{\aleph_\xi}(\alpha) = \aleph_\mu\ ,$$

где $\aleph_\mu$ и есть трансфинитный результат. (Кантор, введя принцип стеснения [18], получил возможность исчислять трансфинитные числа). Таким образом, есть два способа перевода количественного движения размножения в завершенную статическую форму: финитный и трансфинитный. В первом случае квантронная композиция ограничивается финитным числом, во втором (по аналогии с принципом стеснения Кантора) трансфинитным числом.

Трансфинитный образ действия

Назовем трансфинитно-ограниченную (завершенную) композицию квантронов **трансфинитным образом действия:**

$$T(\alpha) = \overleftarrow{@}^{\aleph_\xi}(\alpha)\ , \qquad (1.1.9)$$

где $\aleph_\xi$ - некая трансфинитная мощность.

Как показал Г. Кантор - всякая трансфинитная мощность не имеет линейных комбинаций, т.е. $a\cdot\aleph_\xi + b = \aleph_\xi$, где a, b - финитные (конечные) числа (даже, если $a = \aleph_\xi, < \aleph_\psi$).

Какими свойствами обладает трансфинод прямого действия T(α)? Первое и самое главное свойство, важное для наших дальнейших построений, состоит в том, **что T(α) не зависит от конкретно используемых финитных чисел (см. [22]):**

$$\underbrace{1+2+3+4+\ldots}_{\aleph_0} = \aleph_0 \quad ; \quad \underbrace{10+20+30+40+\ldots}_{\aleph_0} = \aleph_0$$

$$\underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots}_{\aleph_0} = \aleph_1 \quad ; \quad \underbrace{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot\ldots}_{\aleph_0} = \aleph_1$$

Во-вторых, **T(α) зависит только от ступени α прямого действия.** Если это так, то основной гипотезой, принимаемой нами в качестве рабочей, состоит в том, что *качественные* потенции действия α определяются „количественно” трансфинодом этого же прямого действия. Иными основами, можно утверждать, что, чем больше трансфинод прямого действия, тем больше потенциал действия ступени α к качественному преобразованию чисел, или наделению их качеством. Если различения чисел ввести знак различия ρ, то это положение возможно формально описать. А именно, что различие между числами одного качества, например, натуральными или действительными и т.п. вполне выражается финитным числом, иначе говоря, *разница финитна*:

$$\rho\,(10; 5) = f, \qquad \rho\left(\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right) = f\,, \qquad \rho\,(\sqrt{2}; \sqrt{5}) = f\,,$$

где f – финитное число.

Но если исходное число при выполнении некоего преобразования (-1), а результат равен „ i ” ($\sqrt{-1}$ = i), то эти числа *отличаются друг от друга качественно;* также и $\sqrt{2}$ = 1,41. . . , где исходное число 2 и результат -1,41… - также различаются качественно, что в явном виде отображается в структуре их записи.

Сформулируем исходные посылки-требования для получения „хорошего” определения, что есть трансфинод?

Во-первых. Трансфиноды первых трёх действий должны быть различны, т.к. интуитивно понятно, - раз порождаемые этими действиями качества чисел различны, то должны быть различны и их трансфиноды. Отсюда сразу же следует, что определение трансфинода в виде: Т(α)= a α $\aleph_\xi$ - этому требованию не удовлетворяет, т.к. t + $\aleph_\xi$= $\aleph_\xi$ и t$\cdot$ $\aleph_\xi$ = $\aleph_\xi$, этого быть не должно.

Во-вторых, в общем случае бинарные действия некоммутативны, и потому их трансфиноды, могут быть представлены, в виде завершенного квантрона, двояко: Т(α)= $\overleftarrow{@}^{\aleph_\zeta}$ или Т(α)= $\overrightarrow{@}^{\aleph_\zeta}$. За определение Т (α) нужно выбрать один из них. Примем, что Т(α)= $\overleftarrow{@}^{\aleph_\zeta}$.

В-третьих, остается определить трансфинитную мощность $\aleph_\xi$, которую следует использовать для завершения квантронной композиции. Используем для этого минимальную, т.е. счетную мощность- $\aleph_0$. Пока важно лишь её принципиальное присутствие в определении как именно трансфинитного числа. Т.е. важно, что процесс ограничивается пусть хотя бы минимальной мощностью, и в результате завершается. За определение трансфинода, таким образом, примем следующее:

Определение. *Трансфинидом прямого действия* α *назовем* ***счетную*** *композицию квантронов действия α* ***с рекурсией в основание****:*

$$T(\alpha)=\overleftarrow{@}^{\aleph_0}(\alpha)=\underbrace{(((f\ \alpha\ f)\ \alpha\ f)\ldots\alpha\ f)}_{\aleph_0}=f\ \underleftarrow{\alpha+1}\,\aleph_0\,.$$

Учитывая, что

$$f+\aleph_0=f\cdot\aleph_0=(\aleph_0)^f\,,$$

где f – произвольное финитное число, в дальнейшем при вычислении трансфинодов, для упрощения вычислительных процедур будем заменять финитное число f в выражении (1.1.10) $f\ \underleftarrow{\alpha+1}\,\aleph_0$ на кардинал счетной мощности $\aleph_0$:

$$T(\alpha)=\overleftarrow{@}^{\aleph_0}(\alpha)=\underbrace{(((\aleph_0\ \alpha\ \aleph_0)\ \alpha\ \aleph_0)\ldots\alpha\ \aleph_0)}_{\aleph_0}=\aleph_0\ \underleftarrow{\alpha+1}\,\aleph_0\,.$$

Вычислим **трансфиноды** действий первых пяти ступеней.

Для действия сложения:

$$T(\underline{1})\equiv T(+)=\overleftarrow{@}^{\aleph_0}(a+b)=\underbrace{(((f+f)+f)\ldots+f)}_{\aleph_0}=f\times\aleph_0=\aleph_0 \qquad (1.1.11)$$

Для действия умножения:

$$T(\underline{2})\equiv T(a\cdot b)=\overleftarrow{@}^{\aleph_0}(a\cdot b)=\underbrace{(((f\cdot f)\cdot f)\ldots\cdot f)}_{\aleph_0}=f^{\aleph_0}=\aleph_1 \qquad (1.1.12)$$

(1.1.13)

Для действия возведения в степень:

$$T(\underline{3})\equiv T(a^b)=\overleftarrow{@}^{\aleph_0}(a^b)=\underbrace{\left(\left(\left(f^{f}\right)^{f}\right)^{f}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}_{\aleph_0}=f^{f^{\aleph_0}}=\underbrace{\left(\left(\left(\aleph_0^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}_{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0^{\aleph_0}}=\aleph_2$$

Для действия слабой сверхстепени:

$$T(\underline{4})\equiv T({}^{b}{\circ}a)=\underbrace{{}^{\cdot^{\cdot^{\aleph_0}}}{\circ}\left({}^{\aleph_0}{\circ}\left({}^{\aleph_0}{\circ}\,f\right)\right)}_{\aleph_0}=\underbrace{{}^{\cdot^{\cdot^{\aleph_0}}}{\circ}\left({}^{\aleph_0}{\circ}\left({}^{\aleph_0}{\circ}\,\aleph_0\right)\right)}_{\aleph_0}.$$

Выражение

$$\underbrace{{}^{\ddots\,\aleph_0}_{\quad\circ}\left({}^{\aleph_0}_{\circ}\left({}^{\aleph_0}_{\circ}\aleph_0\right)\right)}_{\aleph_0}$$

вычислим по шагам (имеется ввиду последовательное выполнение операции возведения 1, 2, 3, …ωраз):

1. ${}^{\aleph_0}_{\circ}\aleph_0 = {\aleph_0}^{{\aleph_0}^{\aleph_0}} = \aleph_2$; 2. ${}^{\aleph_0}_{\circ}\aleph_2 = {\aleph_2}^{{\aleph_2}^{\aleph_0}} = \aleph_3$ 3. ${}^{\aleph_0}_{\circ}\aleph_3 = {\aleph_3}^{{\aleph_3}^{\aleph_0}} = \aleph_4$ …

В пределе на шаге ω получим величину трансфинода для слабой сверхстепени:

ω. $T({}^{b}_{\circ}a) = \aleph_{\omega+1}$. (1.1.14)

Для действия сильной сверхстепени:

$$T(\underline{4}) \equiv T({}^{b}_{\bullet}a) = \underbrace{{}^{\ddots\,\aleph_0}_{\quad\bullet}\left({}^{\aleph_0}_{\bullet}\left({}^{\aleph_0}_{\bullet} f\right)\right)}_{\aleph_0} = \underbrace{{}^{\ddots\,\aleph_0}_{\quad\bullet}\left({}^{\aleph_0}_{\bullet}\left({}^{\aleph_0}_{\bullet}\aleph_0\right)\right)}_{\aleph_0}$$

Выражение

$$\underbrace{{}^{\ddots\,\aleph_0}_{\quad\bullet}\left({}^{\aleph_0}_{\bullet}\left({}^{\aleph_0}_{\bullet}\aleph_0\right)\right)}_{\aleph_0}$$

вычислим по шагам:

1. ${}^{\aleph_0}_{\bullet}\aleph_0 = \underbrace{{}_{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\left(\aleph_0^{\left(\aleph_0^{\left(\aleph_0^{\aleph_0}\right)}\right)}\right)}_{\aleph_0} = \aleph_\omega$ 2. ${}^{\aleph_0}_{\bullet}\aleph_\omega = \underbrace{{}_{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\left(\aleph_\omega^{\left(\aleph_\omega^{\left(\aleph_\omega^{\aleph_\omega}\right)}\right)}\right)}_{\aleph_0} = \aleph_{2\omega}$

3. ${}^{\aleph_0}_{\bullet}\aleph_{2\omega} = \underbrace{{}_{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\left(\aleph_{2\omega}^{\left(\aleph_{2\omega}^{\left(\aleph_{2\omega}^{\aleph_{2\omega}}\right)}\right)}\right)}_{\aleph_0} = \aleph_{3\omega}$ … ω. $T({}^{b}_{\bullet}a) = \aleph_{\omega^2}$. (1.1.15)

Для самого слабого действия 5-ой ступени: $a\,\underset{\leftarrow}{\underline{5}}\,b \equiv \overset{\overset{b}{\circ\circ}}{a}$ -выражение для трансфинода примет вид:

$$T(\underset{\leftarrow}{\underline{5}}) \equiv T(\overset{\overset{b}{\circ\circ}}{a}) \equiv \left(\begin{array}{c}\vdots\\ \aleph_0\\ \circ\circ\\ \left(\begin{array}{c}\aleph_0\\ \circ\circ\\ \left(\begin{array}{c}\aleph_0\\ \circ\circ\\ \aleph_0\end{array}\right)\end{array}\right)\end{array}\right)$$

Вычислим его по шагам:

$$1.\ \overset{\aleph_0}{\overset{\circ\circ}{\aleph_0}} = \underbrace{\left({}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\aleph_0}\circ\left({}^{\aleph_0}\circ\left({}^{\aleph_0}\circ\aleph_0\right)\right)\right)}_{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1};\qquad 2.\ \overset{\aleph_0}{\overset{\circ\circ}{\aleph_{\omega+1}}} = \underbrace{\left({}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\aleph_{\omega+1}}\circ\left({}^{\aleph_{\omega+1}}\circ\left(\aleph_{\omega+1}\circ\aleph_{\omega+1}\right)\right)\right)}_{\aleph_0} = \aleph_{2(\omega+1)};$$

$$3.\ \overset{\aleph_0}{\overset{\circ\circ}{\aleph_{3\omega+1}}} = \underbrace{\left({}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\aleph_{3\omega+1}}\circ\left({}^{\aleph_{3\omega+1}}\circ\left(\aleph_{3\omega+1}\circ\aleph_{3\omega+1}\right)\right)\right)}_{\aleph_0} = \aleph_{3(\omega+1)};\ \ldots\ \omega.\quad T(\underset{\leftarrow}{5}) \equiv T(\overset{b}{\overset{\circ\circ}{a}}) \equiv \left(\begin{matrix}\vdots\\ \aleph_0\\ \circ\circ\\ \left(\begin{matrix}\aleph_0\\ \circ\circ\\ \left(\begin{matrix}\aleph_0\\ \circ\circ\\ \aleph_0\end{matrix}\right)\end{matrix}\right)\end{matrix}\right) = \aleph_{\omega^2+\omega}. \qquad (1.1.16)$$

Для более сильного действия 5-ой ступени: $a\,\underset{\rightarrow}{5}\,b \equiv \overset{b}{\overset{\circ\bullet}{a}}$ -выражение для трансфинода примет вид:

$$T(\underset{\rightarrow}{5}) \equiv T(\overset{b}{\overset{\circ\bullet}{a}}) \equiv \left(\begin{matrix}\vdots\\ \aleph_0\\ \circ\bullet\\ \left(\begin{matrix}\aleph_0\\ \circ\bullet\\ \left(\begin{matrix}\aleph_0\\ \circ\bullet\\ \aleph_0\end{matrix}\right)\end{matrix}\right)\end{matrix}\right)$$

Вычислим его по шагам:

$$1.\ \overset{\aleph_0}{\overset{\circ\bullet}{\aleph_0}} = \left(\left(\left({}^{\aleph_0}\circ\aleph_0\right)\circ\aleph_0\right)\circ\cdots\right)\aleph_{0\ddots};\ 1.1\ {}^{\aleph_0}\circ\aleph_0 = \aleph_2;\ 1.2\ {}^{\aleph_0}\circ\aleph_2 = \aleph_4;\ 1.3\ {}^{\aleph_0}\circ\aleph_4 = \aleph_6;\ldots\ 1.\omega\ \overset{\aleph_0}{\overset{\circ\bullet}{\aleph_0}} = \aleph_{2\omega};$$

$$2.\ \overset{\aleph_0}{\overset{\circ\bullet}{\aleph_{2\omega}}} = \left(\left(\left({}^{\aleph_{2\omega}}\circ\aleph_{2\omega}\right)\circ\aleph_{2\omega}\right)\circ\cdots\right)\aleph_{2\omega\ddots};\ 2.1\ {}^{\aleph_{2\omega}}\circ\aleph_{2\omega} = \aleph_{2\omega+2};\ 2.2\ {}^{\aleph_{2\omega+2}}\circ\aleph_{2\omega} = \aleph_{2\omega+4};\ 2.3\ {}^{\aleph_{2\omega+4}}\circ\aleph_{2\omega} = \aleph_{2\omega+6};$$

$$\ldots\ 2.\omega\ \overset{\aleph_0}{\overset{\circ\bullet}{\aleph_0}} = \aleph_{4\omega};\ \ldots\ 3.\ \omega\ \overset{\aleph_0}{\overset{\circ\circ}{\aleph_{4\omega}}} = \underbrace{\left({}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\aleph_{4\omega}}\circ\left({}^{\aleph_{4\omega}}\circ\left(\aleph_{4\omega}\circ\aleph_{4\omega}\right)\right)\right)}_{\aleph_0} = \aleph_{6\omega};\ \ldots$$

$$\omega.\omega \quad T(\underset{\leftrightarrows}{5}) \equiv T(\overset{b}{\overset{\circ\bullet}{a}}) \equiv \left(\begin{matrix} \vdots \\ \aleph_0 \\ \circ\circ \\ \left(\begin{matrix} \aleph_0 \\ \circ\circ \\ \left(\begin{matrix} \aleph_0 \\ \circ\circ \\ \aleph_0 \end{matrix} \right) \end{matrix} \right) \end{matrix} \right) = \aleph_{2\omega^2}\,. \qquad (1.1.17)$$

Пусть задано действие 5-ой ступени: $a\,\underset{\leftrightarrows}{5}\,b \equiv \overset{b}{\overset{\bullet\circ}{a}} = \underbrace{\overset{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\, a}{\bullet}\left(\overset{a}{\bullet}\left(\overset{a}{\bullet} a \right)\right)}_{b}$ -выражение для трансфинода

примет вид:

$$T(\underset{\leftrightarrows}{5}) \equiv T(\overset{b}{\overset{\bullet\circ}{a}}) \equiv \left(\begin{matrix} \vdots \\ \aleph_0 \\ \bullet\circ \\ \left(\begin{matrix} \aleph_0 \\ \bullet\circ \\ \left(\begin{matrix} \aleph_0 \\ \bullet\circ \\ \aleph_0 \end{matrix} \right) \end{matrix} \right) \end{matrix} \right)$$

Вычислим его по шагам:

1. $\overset{\aleph_0}{\overset{\bullet\circ}{\aleph_0}} = \underbrace{\overset{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\,\aleph_0}{\bullet}\left(\overset{\aleph_0}{\bullet}\left(\overset{\aleph_0}{\bullet} \aleph_0 \right)\right)}_{\aleph_0}$; 1.1 $\overset{\aleph_0}{\bullet}\aleph_0 = \underbrace{\left(\aleph_0^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\left(\aleph_0^{\left(\aleph_0^{\aleph_0} \right)} \right)} \right)}_{\aleph_0} = \aleph_\omega$;

1.2 $\overset{\aleph_0}{\bullet}\aleph_\omega = \underbrace{\left(\aleph_\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\left(\aleph_\omega^{\left(\aleph_\omega^{\aleph_\omega} \right)} \right)} \right)}_{\aleph_0} = \aleph_{2\omega}$;1.3 $\overset{\aleph_0}{\bullet}\aleph_{2\omega} = \underbrace{\left(\aleph_{2\omega}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\left(\aleph_{2\omega}^{\left(\aleph_{2\omega}^{\aleph_{2\omega}} \right)} \right)} \right)}_{\aleph_0} = \aleph_{3\omega}$;…

1.ω $\overset{\aleph_0}{\overset{\bullet\circ}{\aleph_0}} = \aleph_{\omega^2}$.

(1.1.18)

Для удобства проведения дальнейших вычислений, начиная со второго шага, введем рекуррентно специальную функцию, необходимую для удобства нумерации индексов трансфинитных кардиналов. Пусть ω_0 есть начальный ординал мощности $\aleph_0$, т.е. $\overline{\omega_0} = \aleph_0$. Обозначим $\overline{\mu}_{i+1} = \aleph_{\omega_0 \mu_i}$ или $\mathrm{O_n}(\aleph_{\omega_0 \mu_i}) = \mu_{i+1}$.

2. $\overset{\aleph_0}{\overset{\bullet\circ}{\aleph_{2\omega}}} = \underbrace{\overset{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\,\aleph_{\omega^2}}{\bullet}\left(\overset{\aleph_{\omega^2}}{\bullet}\left(\overset{\aleph_{\omega^2}}{\bullet} \aleph_{\omega^2} \right)\right)}_{\aleph_0}$;

$$2.1\quad {}^{\aleph_{\omega^2}}\!\cdot\aleph_{\omega^2} = \underbrace{{}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\left(\aleph_{\omega^2}\left(\aleph_{\omega^2}\left(\aleph_{\omega^2}\,{}^{\aleph_{\omega^2}}\right)\right)\right)}_{\aleph_{\omega^2}} = \aleph_{\mu_1};$$

$${}^{\aleph_{\omega^2}}\!\cdot\aleph_{\mu_1} = \underbrace{{}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\left(\aleph_{\mu_1}\left(\aleph_{\mu_1}\left(\aleph_{\mu_1}\,{}^{\aleph_{\mu_1}}\right)\right)\right)}_{\aleph_{\omega^2}} = \aleph_{2\mu_1};\ 2.3\quad {}^{\aleph_0}\!\cdot\aleph_{2\mu_1} = \underbrace{{}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\left(\aleph_{2\mu_1}\left(\aleph_{2\mu_1}\left(\aleph_{2\mu_1}\,{}^{\aleph_{2\mu_1}}\right)\right)\right)}_{\aleph_{\omega^2}} = \aleph_{3\mu_1};\ldots$$

$$2.\omega\quad \overset{\aleph_0}{\overset{\bullet\circ}{\aleph_0}} = \aleph_{\omega_0\mu_1};$$

$$3.\quad \overset{\aleph_0}{\overset{\bullet\circ}{\aleph_{\omega_0\mu_1}}} = \underbrace{{}^{\cdot^{\cdot}}\ {}^{\aleph_{\omega_0\mu_1}}\!\cdot\left({}^{\aleph_{\omega_0\mu_1}}\!\cdot\left({}^{\aleph_{\omega_0\mu_1}}\!\cdot\aleph_{\omega_0\mu_1}\right)\right)}_{\aleph_0} = \aleph_{\omega_0\mu_2};\ \ldots\ T(\underset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{5}}) \equiv T(\overset{b}{\overset{\bullet\circ}{a}}) \equiv \left(\begin{matrix}\vdots\\ \aleph_0\\ \bullet\circ\\ \left(\begin{matrix}\aleph_0\\ \bullet\circ\\ \left(\begin{matrix}\aleph_0\\ \bullet\circ\\ \aleph_0\end{matrix}\right)\end{matrix}\right)\end{matrix}\right) = \aleph_{\omega_0\omega_{\omega-1}} \qquad (1.1.19)$$

Для сильного действия 5-ой ступени: $a\underset{\rightrightarrows}{5}b \equiv \overset{b}{\overset{\bullet\bullet}{a}} = \underbrace{\left(\left(\left(a\cdot a\right)\cdot a\right)\cdot a\right)\cdots}_{b}$ -выражение для трансфинода примет вид:

$$T(\underset{\rightarrow}{5}) \equiv T(\overset{b}{\overset{\bullet\bullet}{a}}) \equiv \left(\begin{matrix}\vdots\\ \aleph_0\\ \bullet\bullet\\ \left(\begin{matrix}\aleph_0\\ \bullet\bullet\\ \left(\begin{matrix}\aleph_0\\ \bullet\bullet\\ \aleph_0\end{matrix}\right)\end{matrix}\right)\end{matrix}\right).$$

Вычислим его по шагам: 1. $\overset{\aleph_0}{\ddot{\aleph}_0} = \left(\left(\left({}^{\aleph_0}_{\bullet}\aleph_0\right)^{\bullet}\aleph_0\right)^{\bullet}\aleph_0\right)_{\ddots}$; 1.1 ${}^{\aleph_0}_{\bullet}\aleph_0 = \aleph_\omega$; Для удобства нумерации индексов трансфинитных кардиналов введем рекуррентно специальную функцию: обозначим $\mathrm{O_n}(\aleph_\omega) = \eta_1^{(1)}$ и $\eta_1^{(i+1)} = \eta_\omega^{(i)}$. Тогда

1.2 ${}^{\aleph_\omega}_{\bullet}\aleph_0 = \underbrace{\left(\cdot^{\cdot^{\cdot}}\aleph_0^{\left(\aleph_0^{\left(\aleph_0^{\aleph_0}\right)}\right)}\right)}_{\aleph_\omega} = \aleph_{\eta_1^{(1)}}$;

1.3 ${}^{\aleph_{\eta_1^{(1)}}}_{\bullet}\aleph_0 = \underbrace{\left(\cdot^{\cdot^{\cdot}}\aleph_0^{\left(\aleph_0^{\left(\aleph_0^{\aleph_0}\right)}\right)}\right)}_{\aleph_{\eta_1^{(1)}}} = \aleph_{\eta_2^{(1)}}$; …1. ω $\overset{\aleph_0}{\ddot{\aleph}_0} = \aleph_{\eta_\omega^{(1)}}$;

2. $\overset{\aleph_0}{\ddot{\aleph}}_{\eta_\omega^{(1)}} = \left(\left(\left({}^{\aleph_{\eta_\omega^{(1)}}}_{\bullet}\aleph_{\eta_\omega^{(1)}}\right)^{\circ}\aleph_{\eta_\omega^{(1)}}\right)^{\circ}\aleph_{\eta_\omega^{(1)}}\right)_{\ddots} = \aleph_{\eta_\omega^{(2)}}$; 3. $\overset{\aleph_0}{\ddot{\aleph}}_{\eta_\omega^{(2)}} = \left(\left(\left({}^{\aleph_{\eta_\omega^{(2)}}}_{\bullet}\aleph_{\eta_\omega^{(2)}}\right)^{\circ}\aleph_{\eta_\omega^{(2)}}\right)^{\circ}\aleph_{\eta_\omega^{(2)}}\right)_{\ddots} = \aleph_{\eta_\omega^{(3)}}$; …

$$\omega.\quad T(\underset{\rightarrow}{5}) \equiv T(\overset{b}{\ddot{a}}) \equiv \left(\begin{array}{c}\vdots\\ \ddot{\aleph}_0\\ \left(\begin{array}{c}\ddot{\aleph}_0\\ \left(\begin{array}{c}\ddot{\aleph}_0\\ \aleph_0\end{array}\right)\end{array}\right)\end{array}\right) = \aleph_{\eta_\omega^{(\omega)}} \qquad (1.1.20)$$

Роны начальных ступеней и их трансфинитные образы представлены на рис. 1.1.13.

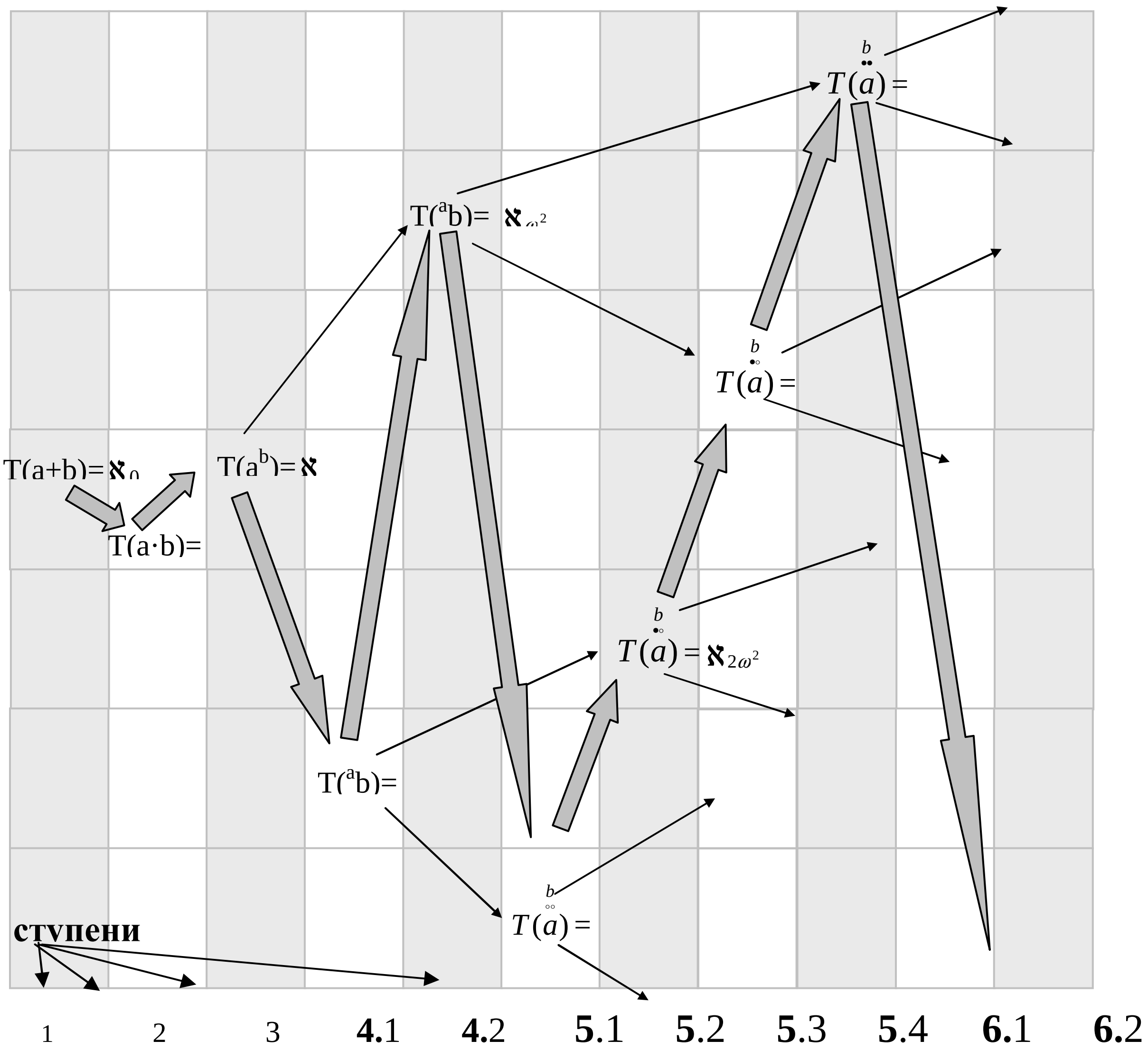


Рис. 1.1.15. Упорядоченная шкала ронов и их трансфинитных образов

Сопоставление трансфинодов различных ронов позволяет сделать к следющим выводам:

- операции 4, 5, 6, и далее струпеней – это качественно новые операции с финитными, а также и с трансфинитными числами;
- имея ввиду, что трансфинод – количественная характеристика качественных скачков, а на уровне операций 4 ступени происходит скачок в трансфиноде то, следолвательно, на этом уровне можно ожидать серьезных результатов и в алгетре и в теории чисел;
- следующий качественный скачок в трансфиноде происходит на уровне операций 5.3, 5.4.;

Таким образом, можно выделить три отличные друг от друга “зоны” проявления качественного разнообразия вычислительно-понятийных средств арифметики (см. рис. 1.1.13):
Зона1. Действия первых трех ступеней;
Зона2. Действия четвертой и слабые действия 5 ступени –5.1 и 5.2;
Зона3. Действия пятой ступени –5.3, 5.4.

1.2. *О финитных и трансфинитных различиях вещей*

1. Три шага в Вечность

100 лет со дня открытия Кантора

Исполнилось сто лет с того времени, когда в конце позапрошлого века Г. Кантор (1845-1918) завершил создание основ теории *бесконечных* множеств [18]. Результаты этого труда, на наш взгляд, по своей значимости выходят далеко за пределы собственно фундаментальной математической разработки, которым он непосредственно являлся, и имеют совершенно особого рода философский, религиозный, научный и мировоззренческий смысл.

Результаты, полученные Г. Кантором, в результате исследования проблемы Бесконечности, явились плодом напряженного труда, длиною почти в четверть столетия. Начиная его на почве математических интересов к обоснованию теории действительных чисел, Г. Кантор самым беспощадным образом столкнулся с проблемой бесконечности, не подозревая вначале всей глубины и трудности этого вопроса. Ситуацию, возникшую на тот период, это хотелось бы особо подчеркнуть, следует оценивать именно как беспощадную и даже в какой то мере трагическую, как бы заранее обречённую, т.к. до Г. Кантора фактически лучшие представители человечества, гениальные мыслители древности, известные физики, философы, математики, теософы перед образом Бесконечности или отступили, или пытались её обойти, или даже вовсе её запретить (Аристотель, Кронекер [2,3]). Его деятельность была дерзким вызовом сформировавшимися относительно актуальной бесконечности на тот момент стереотипу, который можно было бы сформулировать кратко в трёх пунктах:

- Бесконечное присуще только Богу (**in Deo** (лат.));
- Бесконечное непротиворечиво мыслимо быть не может, его разумное (**in Abstracto** (лат.)) постижение невозможно;
- Бесконечное в сотворённом мире, в природе вещей (**in Natura naturata** (лат.)) отсутствует.

Тем самым утверждалось, что действительно бесконечен только Бог. В этом его совершенство и, соответственно, превосходство над сотворённым им Миром, надо всем тварным. Реальный же мир, человек и его сознание признавались конечными.

Понятно, что мотивами и высшими идеалами, направлявшими деятельность Кантора по пути познания феномена бесконечности среди окружавших его скепсиса, недоверия, насмешек, вражды и т.п. с непоколебимой верой в успех и истинность выбранного пути могли быть только религиозные и никакие иные. Свидетельством тому – выводы, которые он делает как философско – религиозное заключение, как итог, полученный им в результате обобщения математических результатов.

Во-первых. Актуально бесконечное при наличии соответствующих определений может быть вполне удовлетворительно мыслимо в разумных понятиях (in Abstracto), а именно как чисел <u>трансфинитных</u>, (т.е. лежащих за пределами всякого конечного), как чисел новой природы, оставляющих позади себя всякое конечное число. Это, т.е. означало, что в соответствующих определениях *трансфинитное* доступно логическому мышлению и даже рассудку.

Во-вторых. Шкала трансфинитных чисел простирается в бесконечное и сверху "ограничивается" только Абсолютным, принадлежащим атрибутам Господа Бога, к которому уже неприложимы трансфинитные определения и понятия. Здесь, как полагал Г. Кантор бессилен и Разум человека. Разумных <u>определений</u> в этой сфере нет.

В-третьих. Напротив, к познанию сотворённого мира трансфинитные числа приложимы, они укоренены в природе вещей. Идея актуальной бесконечности является более совершенным средством познания окружающего нас мира и в каждом конкретном случае должно опираться на трансфинитные понятия.

Таким образом, Кантор безусловно утвердительно относился к реальности Актуальной бесконечности in Deo, in Abstracto, in Natura naturata. И если в первое положение (in Deo) как и мы, он верил, то второе (in Abstracto) доказал, а на третье лишь указал, положив в качестве основания для этого гипотезу о единстве Мира. "Эта связь обеих реальностей (объективной и субъективной) имеет свой собственный корень в единстве всего, к которому мы сами принадлежим" [18]).

Два этапа доканторовского периода развития представлений о числе

С точки зрения пифагорейской школы, видевшей число в основании вещей, не трудно прийти к выводу, что понимание человеком себя, окружающего мира и Бога во многом определяется мерой его понимания Числа. До появления в свет работ Г. Кантора (1845 –19918) в развитии представлений о числе можно выделить два этапа.

На первом этапе от древности до Ньютона – Лейбница развитие представлений о числе шло в свете представлений о природе вещей как о неких финитных, конечных феноменах. Это вполне отчетливо подтверждалось и наблюдениями и исследованиями окружающего мира, и было также характерно для идеального мира, мира образов сознания.

На втором этапе от Ньютона – Лейбница до Г. Кантора (середины 19 века) возникает и развивается на почве функций действительного переменного идея о переменной числовой величине убывающей или растущей сверх всяких границ. Такая потенциально бесконечная величина, называлась Г. Кантором несобственно-бесконечной величиной, и явилась предвестницей появления собственно бесконечных, актуально бесконечных чисел.

Третий период в развитии понятия о числе связывается с именем Г. Кантора, и ознаменовывается введением в обиход рассудочного сознания, рационально-логического мышления, а затем и математики актуально-бесконечных, трансфинитных чисел, которые не без основания в последующем стали называться числами совершенно новой природы, новой сущности.

Важно отметить, что Бесконечность вошла, прежде всего, в обиход математики, а затем в сознание человечества именно через число. Г. Кантор назвал открытые им новые трансфинитные сущности также ч и с л а м и. Факт создания Кантором приемов их различения и взаимных преобразований в виде алгебры трансфинитных чисел означал для человечества завершение огромного этапа познания и «сближения» с Вечностью. Таким образом, в 20-м веке идея о Трансфинитном оказалась доступной не только интуитивно-смысловому созерцательному видению некоторых гениев, но и - как соответствующим образом подготовленному и достаточно развитому понятию - непротиворечивому мышлению в рамках обычного рассудка, обычного формально- логического сознания. Человечество приобрело возможность оперировать числами совершенно фантастической природы средствами *обычного* дискурсивного мышления. Это достижение есть беспрецедентная, хотя еще и не реализованная в полной мере, возможность для человека в познании себя, Бога и сотворенного им Мира.

О познавательном значении открытия Г. Кантора

А. Лосевым глубоко проанализирован и разработан круг вопросов, связанных с особенностями понятийной работы Разума человека. В основе смысловой деятельности Разума лежит полярность. Разумно мы «видим» только полярное, то есть только контрасты, различая разницы. Там, где их нет – нет и разумного зрения, нет смысла, нет и работы сознания. Второй особенностью деятельности Разума мы хотели бы выделить способность абстрагирования, т.е. стремление получать универсальные знания. Имея в виду эти два обстоятельства, отметим, что в итоге такого стремления вся система знаний должна опираться на такой признак всего сущего, всякой вещи, всякого предмета универсальнее и проще которого уже найти невозможно. Таким универсальным признаком всего сущего и является признак Бытия, признак того, что нечто есть, существует, и что еще оно, кроме всего прочего, мыслится и что сам смысл Его при этом также имеется в наличии. И в Бытии смысла отражается бытие всего Сущего. Таким образом, бытие – последняя пристань Универсализации, последняя инстанция Абстракции. За ней лежит бездна Небытия. Она как Ночь, оттеняющая свет, выделяет островки смыслового Бытия, Света. Она как полюс Бытия, с помощью которого и возможно породить смысл Бытия. Г. Кантор и А. Лосев сходятся в определении числа, как понятия реализованного на основе воплощения в максимальной степени принципа абстракции. Г. Кантор говорит, что число *(мощность) – это то, что остается от множества, после абстрагирования от качества и порядка (в расположении) его элементов.*

Восхождение на эту ступень абстракции при размышлении обо всяком *едином во многом* и порождает понятие о числе или мощности. Актуально бесконечное в этом виде он назвал трансфинитным кардинальным числом. Актуально бесконечное во второй своей форме присоединяет к себе идею порядка и выступает в виде трансфинитного ординального числа. Их свойства принципиальным образом отличаются, по некоторой аналогии, можно сказать, как отличительные свойства скалярных и векторных величин между собой.

Далее, работая над понятием числа, как мощности, А. Лосев на основании принципа Гармонии задает естественный для диалектика вопрос «а что есть единство бытия и небытия, составляющих собой основу смысла числа». Таким их единством является движение, а в самой универсальной, собирательно-обобщающей форме – становление, а также как и самый вообще принцип изменения. (Все вещи движутся, все вещи в труде. И даже ветер кружится … и кружатся мириады звезд, и частицы вакуума, то есть, по крайней мере, все то, что нам уже известно). Во всяком становлении происходит рождение становящейся вещи в данное мгновение, то есть возникает бытие, и тут же уходит в небытие то, чем оно только что было. В движении это происходит непрерывно, и движение -это постоянный переход Б в zБ и наоборот zБ в Б.

Таким образом, получается, что мы, пытаясь построить универсальную систему понятий, как специальный инструмент познания приходим вначале к числу (мощности), а затем к движению, первопричине всякого бытия (А. Лосев). В этой точке исследования происходит сопряжение таких категорий как актуально – бесконечное, движение, бытие и небытие (и в ближайшей интерпретации как *определенное и не определенное*).

На этом основании можно сделать уже и первый вывод в направлении, касающемся интерпретации актуальной бесконечности: природа актуальной бесконечности глубоко связана с природой движения и, следовательно, со всяким феноменом бытия. Т.е. Актуальная бесконечность должна проявлять себя, прежде всего, в структурах движения, и всякий реальный облик бытия должен быть образован синархией, структурой отдельных элементарных движений.

Наблюдая природу вещей: воду, воздух, огонь, мы обнаруживаем зыбкость, непостоянство, непрочность, связанную с подвижностью, изменчивостью стихий, с их движением. Мы усматриваем в этом некое несовершенство, как строительном материале, некую неопределенность.

Этот вывод тоже следует признать верным, так как исходно движение – это смесь бытия с небытием, то есть с неопределенностью, тьмой, доходящей до бездны, - высшей формы неопределенности.

Представители пифагорейской школы считали понятие предела и беспредельности самыми трудными для приведения в одно, для синтеза, для гармонии. Однако нужно дать дань уважения гению А. Лосева, что он усмотрел и здесь, то есть в актуальной бесконечности именно гармонию предела и беспредельность. Актуальную бесконечность он видел как ограниченную бесконечность или ограниченную безграничность. И в этом виде называл ее качеством, то есть особым видом состояния бытия, когда облик цельной, определенной, ограниченной для внешнего наблюдения вещи создается движением (самозамкнутым), но которая, с другой стороны, внутри себя безгранична, и представляет собой «полет» над бездной небытия, над беспредельностью. Таким образом, Качество есть в смысловом отношении -гармония финитного и трансфинитного, и нетривиальная интерпретация актуальной бесконечности возможна только именно в связи с понятием Движения.

До Г. Кантора «бесконечное» виделось только в Боге как Абсолютно совершенном источнике всего сущего. Г. Кантор показал реальность актуальной бесконечности в разумной сфере деятельности человека, дал инструмент смыслового различения различных уровней и видов бесконечности, создав с помощью принципа стеснения соответствующую шкалу трансфинитных чисел. После Г. Кантора актуальная бесконечность стала реальностью in Abstracto.

Сам Г. Кантор безусловно верил, что актуальная бесконечность присутствует и в сотворенном Мире, и говорил, что она должна быть присуща всему живому, психическому миру человека [18].

И если к высшей реальности – Богу - применим предикат Абсолютности, то к сотворенному Им Миру, Кантор считал, вполне применимым предикат актуальной бесконечности, шкала которой нисходит из Абсолютного. При этом в самом «низу» видится, как наименьшее из всех трансфинитных чисел – счетная бесконечная мощность (мощность всего натурального ряда в целом).

Интерпретацию актуальной бесконечности нужно стремиться увидеть, прежде всего, применительно к пространству и времени. Как позже выяснилось, для осуществления этого намерения понадобилось разработать дополнительные средства для операций с трансфинитными числами и разработать новый раздел математики – исчисление действий.

2. Качественные преобразования чисел

Число в интерпретациях

Все правильное создается по правилам, но
все только правильное – мертво есть.
П. Жаворонков

Число в интерпретациях является универсальным средством познания и моделирования – вот главный вывод, который повторяет современная наука вслед за пифагорейцами. Создание всякого порядка, всякой соразмерности не обходится без числа. Тема устроения Числом бытия вещей бесконечна. В настоящее время она разрабатывается почти всей современной наукой, всей системой современного знания.

Благодаря тому, что математика оперирует числом, с ее помощью добились многого, так как Математика есть своеобразное проявление точности в свободе. Однако и ее возможности не безграничны, за пределами ее досягаемости остаются пока и сам феномен жизни, феномен красоты, а также, что самое неприятное, первичные, родовые понятия (*в попытках дать им определения математика также бессильна*), на которых базируются все ее отправные определения. Во всем остальном применение математики создает своим владельцам ощущение благополучия и силы. Поэтому в погоне за силами и за властью над окружающим миром развитие математических знаний стали активно поощрять. И если первоначально в 6 в. до Р.Х. «*…математика сложилась как наука в религиозном союзе пифагорейцев и была частью их религии. Она имела ясную цель - это был путь слияния с Божеством через постижение гармонии мира, выраженной в гармонии чисел*» [Речь Р. Шафаревича в Геттингене], то к концу 20 века человечество начало ощущать потенциальную возможность гибели от безумной гонки в накоплении и применении такого рода знаний.

Математика, кроме того, обходит молчанием и множество роковых вопросов: а кем создано само число? *как* конкретно происходит устроение числом? почему мы, действуя по правилам правильной математики, не можем создать живую вещь (наша вещь остается только скорлупкой и аббревиатурой жизни)? Познание этих вопросов есть тяжелое занятие, „которое Бог дал сынам человеческим” (Еккл.1.13). Хотя, конечно, при всем этом нельзя не отметить и некое подобие математических принципов принципам устроения интеллектуально-духовной сферы человека.

Какими же критериями пользуется тот или иной индивидуальный разум или же соборный разум человечества при выборе направлений исследований в области математики? Для прикладной математики этот вопрос является риторическим. Что же касается „чистой” математики, то тот или иной предмет её исследования выбирается скорее из соображений внутренних, самодовлеющих критериев, направленных, как правило, или на саморазвитие, или определяется просто жаждой познания.

С другой стороны, следует, конечно, иметь в виду, что саморазвитие математики, являющееся полезным только для неё самой, не есть то лучшее, чего можно бы было ожидать, непосредственно самому человеку с его задачами земного бытия. На сегодняшний день уже стала всем понятной и очевидной истина, что ничем не обузданное познание превращает в итоге добытые знания в необъятное чудовище, в котором толпа исследователей на одном конце не имеет представления о том, что творится на другом (здесь налицо -интеллектуальный аналог Вавилона).

Облагородить этого «монстра» (ставшего, к сожалению, уже таковым на сегодня) можно только соображениями иного, как мы полагаем, высшего плана. Математика должна служить человеку в его поисках путей к своему Творцу, а все остальное должно быть естественным следствием, вытекающим из этого принципа. В противном случае, переполненная колоссальными знаниями, она способна привести человечество к самоубийству[18].

Феноменология действий. Ступени обобщения сложения и понятийный аппарат математики.

Существуют, как известно, три прямых арифметических действия: сложение -действие первой ступени, умножение - действие второй ступени и возведение в степень - третьей:

ступень	I	II	III
действие	$a+b$	$a \cdot b$	a^b

Эти действия, кроме начального - сложения - получаются повторением действия предыдущей ступени “b” раз:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b}, \quad a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b}.$$

Таким же способом можно ввести действия IV, V и т. д. ступеней [1]. Например, повторяя действие возведения в степень “b” раз, получим сверхстепенную операцию [1, 8, 9, 15]

$$^{b}a = ((\underbrace{a^{a})^{a})^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}})^{a}}_{b}.$$

Далее этот прием можно повторять сколько угодно. Но стоит ли вводить действия высших ступеней? Можно ли при этом ожидать раскрытия каких-то новых, дополнительных резервов в математических методах?

Рассмотрим, что дало математике последовательное введение действий первых трех ступеней? Совершенно очевидно, что с ростом количества прямых и обратных действий с числами развивается и понятийный аппарат математики. Прежде всего, это связано с тем, что при определении обратных операций с необходимостью происходит расширение понятия Числа. Такое расширение происходит на каждой ступени.

табл.1.2.1

ступени	I	II	III
числовое множество, на котором исходно замкнута прямая операция	$a+b$ натуральный ряд	$a \cdot b$ натуральный ряд	a^b натуральный ряд
обратная операция	$a - b$	$a : b$	$\sqrt[b]{a}$; $\log_b^a$
расширенное числовое множество, делающее обратную операцию замкнутой	целые числа	рациональные числа	действительные и комплексные числа
противоположности качественной определенности чисел, возникающие на данной ступени	Положительное - отрицательное	Целое -дробное (целое-часть)	Действительное-мнимое ; Рациональное-иррациональное

Каковы свойства алгебраических операций IV ступени; получается ли на IV ступени расширение понятия числа? Что дает V ступень ... и вообще “натуральный ряд” ступеней?

[18] Однако проблема интерпретаций непосредственно трансфинитных чисел в физике и других науках, несмотря на соответствующие пожелания и самого их создателя и других математиков [2], так и осталась нераскрытой до сих пор, кроме, пожалуй, только иногда появляющихся ростков очерчивания подходов к этой проблеме [2]. А после открытия фракталов интерес к трансфинитным числам несколько угас.

Каковы наиболее общие возможности введения новых действий и получения новых, связанных с ними чисел? Вводя нестандартное обозначение для действия, все эти вопросы можно свести в таблицу:

табл.1.2.2

	ступени	I	II	III	IV	V
действия	*стандартное обозначение*	$a+b$	$a \cdot b$	a^{b}	${}^{b}a$	?
	нестандартное *обозначение*	$a\,\underline{1}\,b$	$a\,\underline{2}\,b$	$a\,\underline{3}\,b$	$a\,\underline{4}\,b$	?
	новые числа	отрицательные	рациональные	иррациональные комплексные	?	?

Для того, чтобы начать исследовать потенциальные возможности движения в этом направлении, введем некоторые обозначения. Прямую алгебраическую бинарную будем обозначать почти стандартным способом $a\underline{\alpha}b=c$, где “a” назовем основанием, “b“ - показателем, $\underline{\alpha}$- ступенью действия α, “c” - результатом действия α. В общем случае некоммутативная бинарная операция α имеет две обратные операции, которые будем обозначать так:

корень ступени α из числа “b” с показателем “a”: $\sqrt[a]{b}^{\,\alpha} \equiv a\,\overleftarrow{\alpha}\,b$; (*)

логарифм ступени α числа “a” по основанию “ b”: $\mathrm{l}\alpha\mathrm{g}_b^a \equiv a\,\vec{\alpha}\,b$ (**)

Левые части обозначений корня и логарифма в выражениях (*) и (**) наиболее приближены к традиционным, а правые наиболее удобны при обсуждении свойств обобщенных операций произвольных ступеней.

Рассматриваемое исчисление строится, как трехуровневая система понятий: число, действие над числом и оперон. Новое понятие –оперон- рассматривается нами, как действие над алгебраическим действием, или иначе говоря, как средство или построения нового действия, или преобразования одного действия в другое.

Таким образом, в рассмотрение вводятся три типа множеств:

- множества чисел: N; Z ; R ; Q ; C , элементами которых являются соответственно натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные числа;

- множество бинарных алгебраических действий (прямых и обратных):

$$\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\};$$

- множество оперонов Õ={P , Θ, K , L ,...}.

Действие (как операция) над числом преобразует одно число в другое. Понятно, что глубина такого преобразования (имеются ввиду различные действия) может быть различной. При таком подходе всякое действие видится, как определенная мощь преобразования числа, как способ “конструирования”, как способ получения смысла, сущности не только *иного* числа, но и принципиально иного *нового* числа. Стартовое состояние развития понятия о действии начинается, естественно, в опоре на собственный, изначальный, простейший смысл числа, так сказать, родовой, и далее трансформируется по мере прохождения ступеней своего развития в тесной связи с самим числом. В данном вводном разделе наша задача состоит в том, чтобы в первом приближении проследить взаимодействие этих двух понятий -числа и действия для того, чтобы иметь возможность оценить перспективы собственного развития ронового исчисления и его прагматическую значимость для математики вообще.

Итак, число в первоначальном, наипростейшем смысловом видении, зафиксированном в его определении, есть многое соединенное в одно на основе *предельно* доступной человеческому сознанию степени абстракции. При такой глубине абстрагирования остается только одно общее всему свойство, а именно свойство *быть*, *существовать*. Или, иначе говоря, **число есть многое в одном** в предельно возможной степени абстрагировании от индивидуальных различий между элементами (качественных и порядковых видов определенности). Почему предельная? Свойство всех вещей *быть* есть самое универсальное, и потому, стремясь к дальнейшему обобщению, через него уже далее нельзя перешагнуть, и, следовательно, прийти к еще большей степени универсальности. И, во-вторых, по ту сторону определенности, создаваемой свойством *быть* стоит небытие, которое и удерживает окончательно от дальнейших шагов обобщения, т. к. небытие - это ничто, это неопределенность, это некая бездна смысловой неразличимости, смысловой тьмы. Отсюда и следует вывод, что число – это предельно возможный порог разумного ведения или крайняя степень смыслового постижения всего того, что существует. Таким образом, число имеет в себе, с одной стороны, смысл монады, как нечто единое, как нечто одно, и смысл не монады, как нечто раздробленное, нечто разделенное. Как многое число несет в себе элемент смысла, опираясь на который, можно начинать достаточно самостоятельно развивать это понятие. В обычной практике такой подход и привычен, и достаточно понятен.

Гораздо меньшее внимание уделяется исследованию развития понятия числа, в аспекте второй половины его изначального смысла, а именно смысла монады, которым число наделено как бы от самого Единого[19]. Понятие числа развивается, как мы хотим это далее показать, и на основе этого второго смыслового момента.

Первая ступень. Операция первой ступени –сложение (см. табл.1.2.1). Совершенно очевидно, что понятие действия сложения опирается в своем первоначальном оформлении именно на смысловой момент «множественности» числа. Сложение, как числовая операция, предполагает брать *многое* одного числа **a** и соединять с *многим* другого числа **b**, и получать *иное многое* третьего числа **c**:

$$\mathbf{a + b = c.}$$

При этом значки «**a**», «**b**»и «**c**» выделяют, высвечивают именно этот момент смысла, сущности чисел **a, b** и **c**. Итак, **a, b** и **c** отличны друг от друга, и мы различаем их по разнице заключенной в них «множественности». Иначе говоря, в N^+ сложение оперирует *модулями* чисел. Однако, как монады, финитные числа есть одно и тоже, и представляют из себя качественно одинаковые монады, смысл которых - удержание в единстве некое *конечного* множества элементов, частей. Используя такой прием порождения чисел, а именно складыванием одних чисел со всеми другими, или, проще, прибавляя всякий раз к 1 ещё одну 1, мы получим *бесконечное* множество положительных натуральных чисел $N^+=\{1, 2. . . . . \} = \{ i \}$. Спрашивается, манипулируя только сложением, как приёмом изменять исходное число и порождать новое, каких результатов возможно достичь в развитии самого понятия числа? Перечислим их:

1. получить бесконечное множество финитных (конечных) чисел, отличных других (по модулю), но имеющих монаду „единого” у всех принципиально одну (как бы финитную);
2. отчетливо осознать открывающуюся возможность безграничного наращивания модуля числа и подойти к идее переменной величины, к идее безграничного возрастания (в современной математике чаще используется непрерывная переменная: $X \to \infty$);
3. задуматься над *завершением* процесса неограниченного наращивания финитных чисел и тем самым уйти от появившегося при этом *становления*, т.е. незавершенности.

Вариантов завершения возможно несколько. Один из них принадлежит Г. Кантору. Он предложил завершить движение бесконечного наращивания, «перепрыгнув» через все финитные числа, и ввести тем самым число *нового* типа -трансфинитное. Но *новое* в каком смысле -в смысле новой „множественности” или в смысле нового качества „монады”? Надо полагать, что и в том и в другом. Натуральный ряд в целом бесконечен, а это и есть *иное* многое (глубоко иное), чем финитное, и сама трансфинитная монада, несомненно, является качественно иной.

Второй тип завершения состоит во введении вычитания, как действия обратного сложению? Если вычитать из большего меньшее, то всё нормально, заботиться не о чем. Но при вычитании большего из меньшего возникает затруднение? Для разрешения этой операции чисел 1, 2, 3 . . . не хватит. Понятие числа нужно расширить! Но с какой стороны? Со стороны какого смыслового момента? Что при этом нужно изменить в числе? Модуль или тип монады? В данном случае, конечно же, тип монады? Отрицательное число, которое нужно ввести для осуществления

---

[19] При таком взгляде Число своим существованием является молчаливым проповедником Единого, т.к. там, где есть Число - там есть незримое присутствие Единого.

всех процедур вычитания, должно быть числом иного качества. В отрицательном числе тоже есть многое, но сама монада оказывается иной, она - в некотором роде не нечто, а антинечто. В итоге, идейно-смысловой формулой этого понятия является следующая связь между соответствующими категориями:

наличие + антиналичие = отсутствие, нечто + антинечто = ничто.

В числовой интерпретации подобные отношения выглядят так: **а + (- а) = 0** (для выполнения этого равенства нужно только, чтобы | a | =|- a |).

Что даёт первая ступень для развития понятия числа?

- позволяет получить натуральный ряд чисел (отличных друг от друга только по одной половине своей сущности, по модулю)
- позволяет сформировать идею неограниченного возрастания / убывания (идею переменной величины);
- осознать потребность замыкания, завершения, как противоположности процесса неограниченного возрастания / убывания ;
- позволяет сформировать число отрицательного качества, наделяя его качеством антипода чего-либо, так что **нечто + антинечто = ничто** (на этом уровне реализуется богатая в интерпретациях числовая идея о противоположностях положительного и отрицательного, как бытия и антибытия);
- возникает число нового типа, а именно трансфинитное (счетной мощности) число, у которого и множественность качественно иная, и сама монада принципиально другая, что, конечно же, в совокупности весьма заметно отражается на свойствах самих трансфинитных чисел;
- и, наконец, сложение порождает новую операцию - вычитание.

Какой же вывод, прежде всего, следует из этого наблюдения? *На обратных действиях любой ступени необходимо ожидать качественные скачки в понятии числа (*см. табл. 1.2.3*).*

Вторая ступень. Операция второй ступени –умножение (см. табл.1). Умножение порождает свертка сложения:

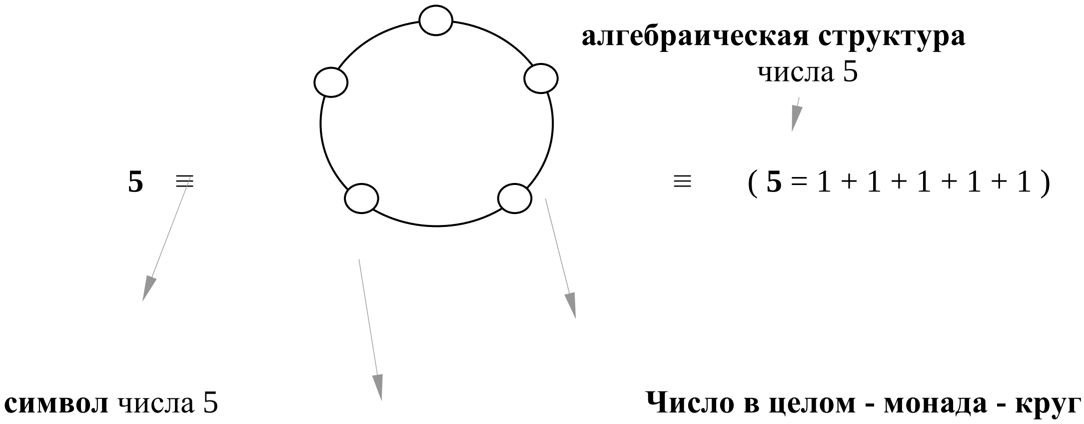
$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + ... + a}_{b \text{ раз}} .$$

Это действие первоначально реализуется на натуральном ряде. И *умножение*, если это касается только натуральных чисел, для развития понятия числа ничего нового не даёт, только разве обеспечивая большие скорости роста изменений модуля. Однако переход к ее обратной операции -делению, как мы ожидаем, должен дать расширение понятия числа. Рассмотрим его смысл?

Для первой ступени, с точки зрения представления о числе, характерен момент подобия сущности составных элементов числа и в целом самого числа, как монад. Здесь имеется ввиду, что и число <u>в целом</u> есть некая единичность, монада, и сами элементы, сами составные части числа есть также монады, т.к. входят в состав числа, как нечто цельное, неделимое (см. рис. 1.2.1):

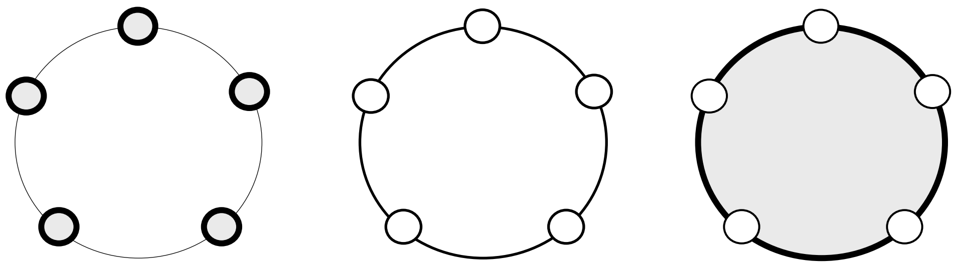
Если, однако, смысловой акцент сместить со стороны смыслового момента *множественности* в понятии числа на аспект *монадообразности*, то такое смещение уже в более явном виде будет указывать на возможность введения числа качественно нового смысла (см. рис. 1.2.2).

На уровне понятия сложения построение смысла числа идёт как бы от многого в одно. Идет синтез монады числа. Монада числа возникает, она поглощает многое, части соединяются в целое. Это принцип синтеза, и этот принцип требует сразу же завершения и дополнения к синтезу анализа. А ещё более точно, введения в определение числа идеи дробной монады, и, следовательно, о существования её дробной части. Итак, если 1 -монада, то её часть, это $\frac{1}{n}$, где n - натуральное число. И тогда некое множество m этих частей, а именно - $m \cdot (\frac{1}{n})$, и будет числом новым, где в одно целое объединены m элементов, каждый из которых есть n-я часть некоей монады.



Каждый элемент числа - монада – круг

Рис 1.2.1 Геометрический образ числа 5.

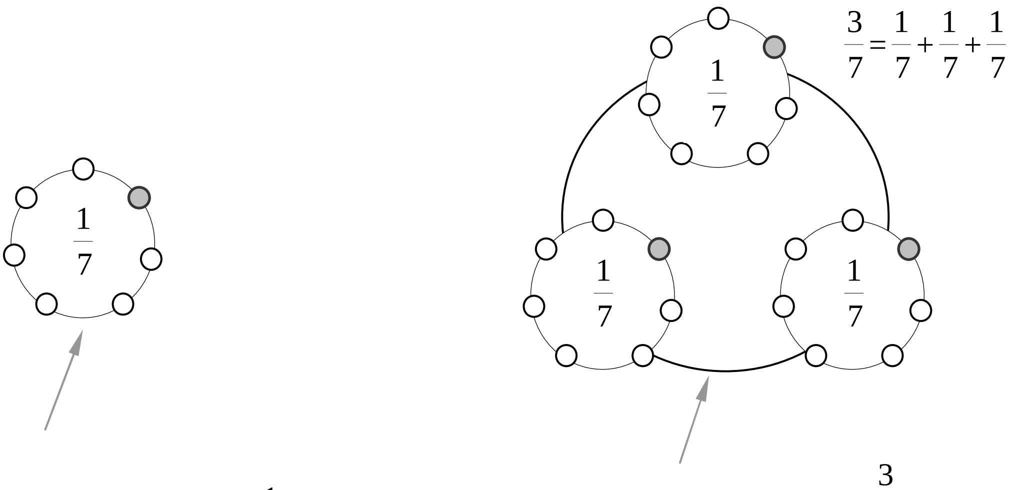


многое – одно (доминирует многое)	многое-одно (смысловое равновесие)	многое – **одно** (доминирует одно)

Рис 1.2.2. Геометрическая интерпретация смещения смысловой доминанты в понятии числа 5

Здесь также следует отметить, что потребность во введении нового (не натурального) числа также возникает на обратной операции к умножению - делении, при намерении поделить меньшее число на большее. Например $^2/_3$; $^4/_5$ и т.п.

Тогда далее и возникает возможность создать в полном виде структуру рационального числа, естественно, более сложную, чем у натурального числа (см. рис. 1.1.3):



$\frac{1}{7}$ как часть монады 1. структура числа $\frac{3}{7}$

Рис. 1.2.3 Геометрическая интерпретация структуры рационального числа в его отношении к натуральному числу.

В структуре рационального числа уже ярко обнаруживает себя иерархичность. В явном виде зародыш этой идеи уже существовал и в структуре натурального числа (монада в монаде). Множество рациональных чисел R более *плотно* заполняют числовую ось, это приводит к тому, что порядковый тип (трансфинитный) в целом всей числовой оси изменяется. Множества R и N оказываются, как бесконечные порядковые типы, не подобными: $\eta \neq \omega$, где η - порядковый тип R, а ω -порядковый тип N^{+}.

Но трансфинитная мощность R продолжает оставаться той же, что и у натуральных чисел – счётной: как трансфинитные монады множества R и N тождественны, неразличимы (см. табл.1): $\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{N}}^{+}$. Итак, главная идея второй ступени - это *делимость…* **монады**! Делимость неделимого. Это возможность входа во внутрь монады и выхода во вне. Это появление, если сравнивать со сложением, новой оси симметрии на числовой оси - единицы:

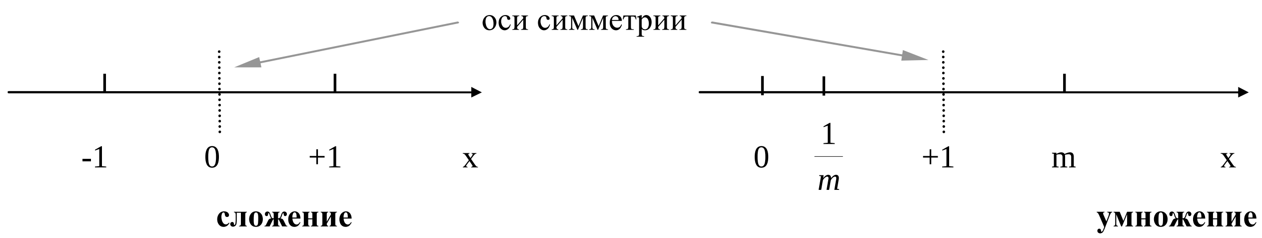


Рис. 1.2.4 Оси симметрии операций 1ой и 2ой ступеней.

Или, иначе говоря, на этом уровне можно ясно видеть, что качество целого отлично от качества частей. Именно в том и состоит синтез частей в целое, что это даёт качественный скачок при образовании новой монады, и что качество целого при этом отлично от качества каждого составного элемента. И если в первом случае мы говорили о *нечто и антинечто* и выстраивали их симметрично относительно **ничто** - в геометрической интерпретации располагая их в одном измерении, то во втором случае нам приходится говорить о целом m и части $\frac{1}{m}$, симметрично располагающихся относительно **единицы** 1.

* Второй способ обобщения и развития понятий состоит в том, чтобы применить к новому только это введённому действию **α** последовательно все те новые качества чисел, которые были прежде получены. Если, например, речь идет о действии третьей ступени- возведении в степень, то последовательность шагов будет следующая:
* определяем действие α вначале для натурального ряда чисел. Далее ищем пути определения, действия 3-ей ступени для чисел нового качества в таком порядке: целые положительные, целые отрицательные, рациональные, иррациональные, мнимые: a^{-b} ; $a^{\frac{m}{n}}$; $a^{1,1\ 1\ldots}$; $a^{b+\mathbf{i}c}$ и т.п.

Таблица 1.2.3.

Разделы	Сопряженные понятия	Сту
		1
А Л Г Е Б Р А	***Названия прямых действий***	**с л о ж е н и е**
	Стандартное и нестандартное обозначение прямых действий	$a+b=a\underline{1}b$
	Названия обратных действий	**вычитание**
	Стандартное и нестандартное обозначения обратных действий	$a-b=a\,\overline{1}b$
	U_p-числовое множество исходного определения прямого действия	$N^+=\{1,2,3, \dots\}$
	U_o-расширенное числовое множество, на котором определяются прямое и обратное действие	$N=\{-\infty, \dots ,-2, -1, 0, 1,2, \dots +\infty\}$
	Виды качественных противоположностей чисел, возникающих на данной ступени	положительное-отрицательное
	Интерпретации качественных противоположностей чисел	Моделирование положительных и отрицательных величин
	Мощности множеств U_p и U_o	бесконечная счетная $\overline{\overline{N}}=a$
	Элементарные алгебраические функции	Y(x)=x+c
	Объекты абстрактной алгебры	группа
А Н А Л И З	***Производная*** **(использование действий в алгебраической структуре определения)**	приращения аргумента: $x_2=x_1+\Delta x$ определение приращения функции: $\Delta y=y(x+\Delta x)+y(x)$
	<u>Интеграл</u> (использование действий в алгебраической структуре определения)	Суммирование элементарных произведений: $\sum_{i=1}^{\infty} y(x_i)\cdot\Delta x$
	Р я д ы **(использование действий в алгебраической структуре определения)**	Суммирование произведений $\boldsymbol{\Sigma}\ cx^i$

п е н и д е й с т в и й				
2	**3**	**4**	**5**	
умножение	**возведение в степень**	сверхстепень	операция 5-ой ступени	
$a \cdot b = a \underline{2} b$	$a^b = a \underline{3} b$	${}^b a = a \underset{\rightarrow}{\underline{4}} b$ -*слабая* ${}^b \dot{} a = a \underset{\rightarrow}{\underline{4}} b$ -сильная	$a \underline{5} b$	
деление	**корень; логарифм**	корень и логарифм сверхстепени	корень и логарифм 5-ой ступени	
$\frac{a}{b} = a \overline{2} b$	$\sqrt[b]{a} = b \overleftarrow{3} a\,; \log_a b = b \overrightarrow{3} a$	$\sqrt[b]{a}^{\,4} = b \overleftarrow{4} a$ $\log 4_a b = b \overrightarrow{4} a$	$\sqrt[b]{a}^{\,5} = b \overleftarrow{5} a$ $\log 5_a b = b \overrightarrow{5} a$	
N^+={1,2,3, …}	N^+={1,2,3, …}	N^+={1,2,3, …}	N^+={1,2,3, …}	
R – рациональные числа	Q-действительные числа С-комплексные числа	**?**	**?**	
Целое- Дробное	Действительное-мнимое Рациональное-иррациональное	**?**	**?**	
Обслуживание измерений	Моделирование колебательных процессов и непрерывных изменений	**?**	**?**	
Бесконечная счетная мощность $\overline{\overline{R}} = a$	Бесконечная мощность континуума $\overline{\overline{Q}} = \overline{\overline{C}} = c$	**?**	**?**	
Y(x)=a·x+c; Y(x)=a/x	$Y(x)=x^n$; Y(x)=exp(x); Y(x)=log(x)	**?**	**?**	
кольцо, поле	кольцо, поле	**?**	**?**	
Соотнесение приращений функции и аргумента: ΔY / ΔX	**?**	**?**	**?**	
Определение элементарного произведения: $\Delta Y(x_i) \cdot \Delta x$	**?**	**?**	**?**	
Определение произведения cx^i	***Определение произведения*** $c \cdot x^i$	**?**	**?**	

Третья ступень. Операция третьей ступени – возведение в степень (см. табл.1). Третья ступень обобщения сложения наиболее обильна глубокими преобразованиями сущности чисел. Возведение в степень a^b развертывается через использование умножения b раз, а сложения a^{b-1} - раз:

$$a^b = \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{b} = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{a^{b-1}}.$$

a^x - наиболее быстро растущая функция, которую называют экспонентой. Впервые после сложения и умножения появляется такое прямое действие, которое является не коммутативным, с очень многими вытекающими отсюда последствиями. Прежде всего, это касается проблемы нейтрального элемента. Если нейтральный элемент у сложения один: $n_0= 0$ и $a + 0 = a$; также один и умножения $n_0= 1$ и $a \cdot 1 = a$, то у возведения в степень их два:

- $a^{n_0} = a \Rightarrow n_0= 1$ - показательный
- $n_s^a = a \Rightarrow n_s = \sqrt[a]{a}$ - основной,

т.е. $a^{n_0} = a^1 = a$ и $(n_s)^a = (\sqrt[a]{a})^a = a$. *Основной* нейтральный элемент n_s необычен. Он зависит от величины показателя степени и, следовательно, не является константой.

Пространственно-геометрические аналоги качественных преобразований форм предметов

Действие возведения в степень вследствие некоммутативности имеет две обратные операции: корень $\sqrt[a]{в}$ и логарифм $\log_a b$, что также отличает ее от действий предыдущих двух ступеней. По намеченному нами ранее алгоритму получения качественно новых чисел-монад, нужно какое-либо обратное действие возведения в степень попытаться расширить, т.е. определить на области не только натуральных целых чисел, но и других, последовательно полученных ранее, качественно новых по отношении к натуральным числам. Тогда требование определить $\sqrt{(-1)}$, оказывается невыполнимым в области действительных чисел, что и приводит к необходимости ввести число $i = \sqrt{(-1)}$, как монаду нового качества.

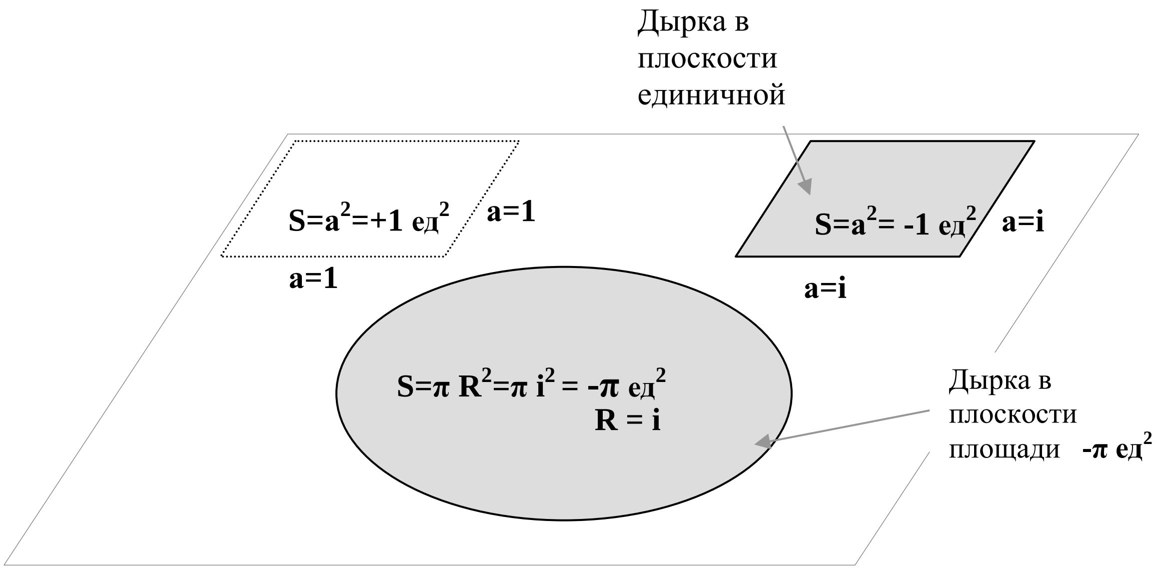


Рис. 1.2.5 Геометрическая интерпретация отрицательных и мнимых чисел.

В геометрической интерпретации мнимая единица есть сторона квадрата, площадь которого отрицательна (см. рис. 1.2.5). Это число можно представить, пользуясь действием корня еще и иначе, понимая его, как среднее геометрическое между положительной и отрицательной монадами:

$$\mathbf{i} = \sqrt{(+1)(-1)},$$

или иначе -мнимое есть среднее геометрическое между нечто и антинечто:

$$\textbf{мнимое} = \sqrt{(\text{нечто})(\text{антинечто})}.$$

В итоге получается следующая схема взаимоотношений ных монад (см. рис. 1.2.6):

Рис. 1.2.6 Аналогия отношения категорий и чисел.

Кроме того, к необходимости дальнейшего развития понятия числа приводит попытка найти $\sqrt{2}$. Этот результат нельзя выразить в рациональных, числах. Т.е. $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде: $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ (в геометрической интерпретации это означает, что диагональ квадрата и сторона квадрата несоизмеримы). Для этого требуется не рациональное, а иррациональное действительное число. Это означает, что на этом уровне качеству числа быть рациональным, противопоставляется качество *иррациональности*, смысл которого удается раскрыть в результате разложения числа в степенной ряд вида:

$$G = \sum_{i=1}^{n} m_i b^i \ .$$

В этом случае записи чисел $\sqrt{2}$ и $\dfrac{28}{29}$ будут иметь вид:

$$\frac{28}{29} = \underbrace{0.(9658602068)}_{T=0} = \underbrace{\frac{9}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \ldots + \frac{8}{10^{10}}}_{T=10} + \underbrace{\frac{9}{10} + \frac{6}{10^2} + \ldots + \frac{8}{10^{10}}}_{T=10} + \ldots$$

$$\sqrt{2} = \underbrace{1.41421356....}_{T=\infty} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + ...$$

Такой подход позволил установить, что всякое рациональное число m/n представляется в виде ряда $\sum m_i b^i$ в десятичном разложении, как периодическая дробь с *конечным* периодом. Напротив, числа типа $\sqrt{2}$ в десятичном разложении являются непериодическими дробями -их период бесконечен.

Следует отметить, что структура числа

$$\frac{28}{29} = \frac{9}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \ldots$$

в сравнении с числом натуральным напоминает целый «небоскрёб», в котором участвуют множество натуральных различных чисел и три действия. А число $\sqrt{2}$ в представлении вида $\sum m_i b^i$ - это уже «небоскрёб» с бесконечным количеством «этажей», т.е. он получен с помощью б е с к о н е ч н о г о количества рациональных чисел, соединяемых тремя действиями:

$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots .$$

Итак, действительные и рациональные числа, как монады, уже оказываются достаточно сложно устроенными - они *имеют развитую иерархическую структуру*! Но с помощью знаков действий записываются достаточно компактно. В самом деле, число 1.4142…, с одной стороны, имеет представление в виде $\sqrt{2}$. Но с другой, может быть записано в виде:

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} + \cdots .$$

Очевидно, что эти два представления сильно разнятся, выражая по-разному одну и ту же смысловую сущность, заключенную в числе $\sqrt{2}$.

Итак, возведение в степень позволяет породить бесконечное множество действительных чисел, образующих множество всех возможных дробей с бесконечным периодом. Таких чисел оказывается в целом уже несчетное бесконечное множество, и мощность этого множества (по континуум гипотезе Г. Кантора) является ближайшей трансфинитной мощностью к счетному:

$$\overline{\overline{N}} < \overline{\overline{Q}} = c\,.$$

Мощность континуума *c*, как трансфинитное число, есть новая трансфинитная монада. Множества всех действительных чисел в геометрической интерпретации непрерывно, в отличие от дырчатого, дискретного, хотя и сколь угодно плотного множества рациональных чисел.

Здесь мы и отмечаем рождение в числовой интерпретации противоположностей дискретного и непрерывного: множества N и R дискретны, множество Q непрерывно. Как непрерывное множество оно, разумеется, есть и другой порядковый тип, обозначаемый λ. На уровне этого множества осуществляются операции с „точками", т.е. также монадами, но монадами иного смысла, чем трансфинитные или просто финитные.

Далее хотелось бы отметить и еще одно „достояние" третьей ступени. Оно касается трансфинитных чисел, а именно операций над ними. Дело в том, что прямые операции первых двух ступеней «не способны» изменить трансфинитное число, а, именно, сложение и умножение не «работают» на трансфинитных мощностях:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \text{ , также и } \quad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0\,.$$

Изменяет их только возведение в степень:

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1; \quad \aleph_1^{\aleph_1} = \aleph_2\,.$$

Этот факт весьма знаменателен. Для финитного числа, с точки зрения его изменения в пределах заданного качества и его конструирования, важно сложение и умножение. Трансфинитное же число можно изменить только начиная с возведения в степень. Что это означает? Это означает, что всякая трансфинитная монада по определению бесконечна, её границы подвижны, и само пополнение её содержания возможно не любыми средствами - они должны быть достаточно сильными и адекватными её сущности. Такая адекватность наступает, когда мощность совершает скачок именно при возведении в степень, т.е. только на третьей ступени.

Как мы наблюдали, понятие числа выше качества, оно - над качеством, т.е. оно прежде качества в смысловом отношении. Однако в своем развитии смысл числа, опираясь на понятие действия, на первой же ступени потребовал введения в число качественной определенности, на основе смыслового диполя между *положительным и отрицательным*. Введение этого качества послужило поводом для широчайших интерпретаций «+» и «-» в самых различных отраслях знаний в физике, искусстве, биологии, социологии, т.е. практически везде путем введения понятия о положительных и отрицательных величинах: положительные и отрицательные скорости, ускорения, заряды, стоимости (наличие и долг), температуры, частоты и т.п.

Вторая ступень, раскрывая в числовой интерпретации, содержание идеи соизмеримости, составленности, части и целого, чаще всего проявляет себя при измерениях тех или иных величин. А дроби, рациональные числа, позволяют оформить количественно, численно эти результаты.

Введение действительных и комплексных чисел реально развязало руки для моделирования непрерывных процессов, движения, а с помощью формулы Л. Эйлера ($e^{\mathbf{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$) оказалась пригодной и для описания колебательных процессов. Эти возможности - главное достояние третьей ступени.

Числовые множества с замкнутыми на них действиями позволили провести соответствующие обобщения и вообще рассматривать не числовые множества и соответственно действия, а произвольные, у которых, однако, некоторые смысловые, т.к. сказать, характеристические мощности оказываются общими. Ими являются понятия группы, кольца, поля и т.п. Эти объекты оказались весьма полезными обобщениями, и развились в самостоятельные разделы, как общая алгебра, и нашли (теория групп) соответствующие интерпретации в физике.

Многие математические объекты, с точки зрения структуры, содержащейся в их формально-логическогом или алгебраическом определении - нетривиальны. В их состав входят действия сразу нескольких ступеней. В частности такими объектами являются ряды и определения производной и интеграла. Наиболее подробно и плодотворно в современной математике исследованы те или иные аддитивные и мультипликативные структуры:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\ ; \quad \prod_{i=1}^{\infty} a_i\ ; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x^{-i}\ \ldots$$

Как мы видим, в задающей формуле того или иного ряда, участвуют прямые действия всех трёх ступеней. А поскольку только они и были известны в своё время, то и не было прецедента говорить о каких-то других задающих структурах, хотя, вообще говоря, это вопрос не беспочвенный. В самом деле, рассмотрим ряд вида $\sum a_i b^{-i}$. Его алгебраическая структура в символах ступеней действий в обобщенном виде примет следующий вид:

$$\overset{\infty}{\underset{i=1}{1}} a_i\ \underline{2}\,(x\,\underline{3}\,i)\,.$$

Отсюда следует, что ближайшими его модификациями могут быть следующие определения:

$$\overset{\infty}{\underset{i=1}{2}} a_i\ \underline{3}\,(x\,\underline{4}\,i) = \prod_{i=1}^{\infty} a^{{}^{i}x}\ ; \qquad \overset{\infty}{\underset{i=1}{1}} a_i\ \underline{2}\,(x\,\underline{4}\,i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot {}^{i}x\ ; \qquad \overset{\infty}{\underset{i=1}{2}}(x_i\ \underline{4}\,i)\,\underline{3}\,a_i) = \prod_{i=1}^{\infty} \left({}^{i}x\right)^{a_i}\ .$$

Или

$$\varphi(x) = \left(\frac{a_1}{x}\right)^{\left(\frac{a_2}{2x}\right)^{\left(\frac{a_3}{3x}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\left(\frac{a_i}{i\cdot x}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}}}$$

(Некоторые свойства сверхстепенного ряда вида $a_n(x) = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a^x}}}}}_{n}$ исследованы Л. Эйлером и Д. Граве [15]).

Аналогичные возможности открываются с определением и производной и интеграла.

Исследованиями этих возможностей мы и занялись более подробно, с тем, по крайней мере, чтобы показать реальную возможность этих обобщений. Первые определения производной в виде:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

были даны И. Ньютоном, Г. Лейбницем в 17 веке и с тех пор не претерпели практически никаких изменений. Между тем, алгебраическая структура производной, как мы видим, достаточно сложный алгебраический объект. В своем определении она имеет следующие содержательные моменты:

- полагание существования функции y(x) и изменение аргумента Δx;
- определение изменения функции Δy = y (x +Δx) - y(x);
- соотнесение между собой изменений функции и аргумента: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;
- переход к пределу: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

С нашей точки зрения возможными для дальнейшего развития понятия о скорости являются три момента, а именно касающиеся того, как задаются изменения аргумента, как находится приращение функции, и как сравниваются изменения функций и аргумента.

При переходе к пределу следует только иметь ввиду, что изменение аргумента должно стремиться к нейтральному элементу операции, задающей приращение аргумента. Для наглядности осуществим формальный переход к следующей ступени определения „производной”. Для этого в обычном определении

$$y' = \lim_{\Delta x \to e_1} \Big(y(x\ \underline{1}\,\Delta x)\ \vec{1}\ y(x) \Big) \vec{2}\ \Delta x$$

где e_1 = 0 (нейтральный элемент сложения), повысим ступень всех действий на единицу:

$$y^{\cup} = \lim_{\xi_x \to 1}\Big(y(x\,\underline{2}\,\xi_x)\,\vec{2}\,y(x)\Big)\vec{3}\,\xi_x .$$

В обычной форме это определение запишется в виде:

$$y^{\cup} = \lim_{\xi_x \to 1} \log_{\xi_x} \xi_y$$

Здесь изменение аргумента ξ_x стремится к нейтральному элементу 2ой ступени - 1. А изменение аргумента ξ_x и функции $\xi_y = \dfrac{y(\xi x)}{y(x)}$, сравниваются обратным действием третьей ступени:

$$y^{\cup} = \lim_{\xi_x \to 1} \log_{\xi_x} \xi_y$$

Теперь о смысле полученного определения более подробно. Технология получения производной состоит в задании изменения аргумента у функции, и в сравнении изменений функции и аргумента между собой.

Сопоставим шаги определения обычной, „производной y'" и новой „производной " $y^{\cup}$:

- *задается изменение независимой переменной:*

Δx $\qquad\qquad\qquad\qquad$ ξ_x

- *ищется новое значение аргумента:*

x изменяется **на** величину Δx $\qquad$ аргумент изменяется не на сколько-то, а **во сколько**:

$x_2 = x_{1+}\Delta x$ $\qquad\qquad$ $x_2 = \xi_x \cdot x_1$, где x_1 - начальное значение, а x_2 - конечное значение аргумента.

- *затем вычисляется –*

на сколько изменилась функция: $\qquad$ **во сколько раз** изменилась функция:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \qquad\qquad \xi_y = \frac{y(\xi x)}{y(x)}.$$

- *производятся сравнения изменений функции и аргумента:*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}; \qquad\qquad y^{\cup} = \lim_{\xi_x \to 1} \log_{\xi_x} \xi_y$$

Нетрудно показать, что $\lim\limits_{\xi_x \to 1} \log_{\xi_x} \xi_y$ существует, во всех тех случаях, когда существует обычная производная y'. Диаграммы используемых и в том и в другом случае действий имеют вид:

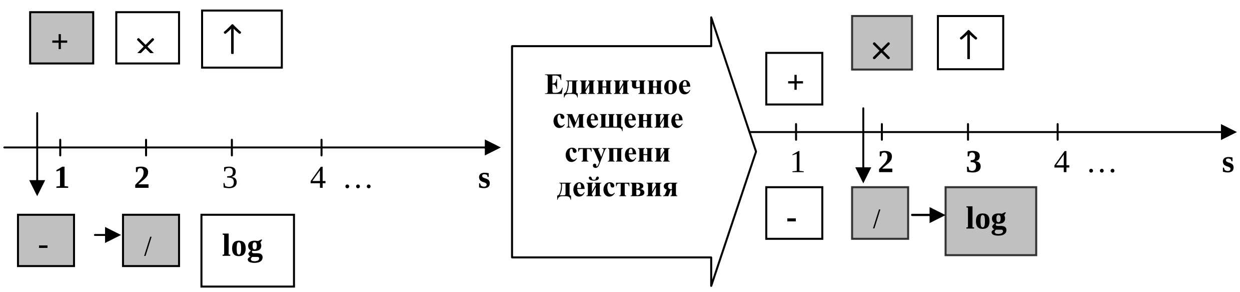


Рис. 1.2.7 Сопоставление диаграмм действий двух разных в алгебраическом отношении определений „производных."

Систематическое сокращенное изложение «Начал исчисления действий» и основ «мультипликативного анализа» даны в Приложении 1.

Пространственно-геометрические аналоги качественных преобразований форм предметов

Обсуждение проблемы интерпретации трансфинитных чисел, начнем с постановки в некотором роде необычной задачи: возможно ли *изменить* объект, *сохраняя* его качество (т.е. оставляя неизменной, в том числе, и его сущность)? Следует сразу, конечно же, спросить, а для чего нужно что-либо изменять, трансформировать и преобразовывать? Какова обычно цель осуществления таких намерений?

Как правило, это практически делается для того, чтобы расширить спектр полезных свойств того или иного объекта и придать объекту какое-либо новое свойство или качество, при этом по возможности одновременно сохраняя и его старые свойства. В такой постановке вопроса обнаруживается противоречие: *изменить и сохранить*. Требование изменения и требование неизменности взаимно противоположны, и могут быть выполнены одновременно только особым образом.

Обсуждение технологии разрешения этого противоречия и приводит к необходимости использовать трансфинитные понятия и методы.

Начнем с рассмотрения различных определений конечного числа:

- *конечное число- результат счета различных объектов (одного или различных качеств);*

- *конечное число (количество) - результат абстракции на некотором множестве от качества и порядка элементов (определение Г. Кантора [18]);*

- конечное число - результат измерения, т.е. сравнения однородных объектов в каком либо отношении между собой.

Из последнего определения следует, что конечное, финитное число получают, в результате проведения сравнения внутри объектов одного качества, т.е. в результате процесса, который мы называем *измерением.*

Следует обратить внимание, что таким способом можно сравнивать объекты *только одного качества* (см. табл. 1.2.4).

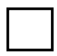
Во всех случаях, приведенных в таблице, геометрические и физические объекты, расположенные в одной строке, **финитно** отличаются друг от друга, и могут быть преобразованы друг в друга умножением на **конечное** число.

Но возможно ли сравнивать или *соизмерять друг с другом* отрезки и окружности, окружности и квадраты, массы и веса, т.е. объекты *разных качеств*.

Г. Кантор, Н. Кузанский, Б. Больцано и все сторонники объективной воплощенности актуальной бесконечности так или иначе “подозревали”, что *трансфинитные различия суть качественные различия, а трансфинитные изменения суть качественные скачки* [2, 4, 17].

Рассмотрим примеры, которые так или иначе демонстрируют, что качество имеет трансфинитную (действительно бесконечную) природу, *иными словами бесконечность в реальном мире мы воспринимаем как некое особое качество, а различные бесконечности как различные качества.*

Пример 1.

Имеем: “**.** “ - точка;  - окружность;  - отрезок;  - квадрат – качественно различные геометрические объекты.

Интуитивно ясно, что точка и окружность - качественно различные объекты. Обратим внимание на тривиальные факты. Окружность - бесконечное множество (континуум) определенным образом упорядоченных точек. Также и квадрат - определенным образом упорядоченное континуум множество отрезков. Очевидно также, что окружность и отрезок также качественно различные геометрические объекты.

Если “разрезать” окружность в какой - либо точке и увеличить ее радиус кривизны до бесконечности, то получим отрезок. Фазы перехода окружности в отрезок показаны на рис. 1.2.8.

Табл. 1.2.4

Финитные изменения некоторых геометрических и физических объектов.

Качество Объекта	*Мера того же качества*	*Примеры*	*Алгебраическая запись финитных преобразований*
Отрезок прямой	единичный отрезок l_0	l_2 l_1 l_3	$l_1 = f_1^* \cdot l_0$ ………… $l_3 = f_2 \cdot l_0$
Векторы одного направления	единичный вектор того же направления $\bar{k}$	$\bar{a}$ $\bar{b}$ $\bar{c}$	$\bar{a} = f_1 \cdot \bar{k}$ $\bar{b} = f_2 \cdot \bar{k}$ $\bar{c} = f_3 \cdot \bar{k}$
Окружности	единичная окружность G_0 $r_0 = 1$	G_3 G_1 G_2 r_2 r_1 r_3	$G_1 = f_1 \cdot G_0$ $G_2 = f_2 \cdot G_0$ . . .
Квадраты	единичный квадрат k_0	k_1 k_2 k_3	$k_1 = f_1 \cdot k_0$ $k_2 = f_2 \cdot k_0$ . .
Массы	единичная масса m_0	m_1 m_2 m_3	$m_1 = f_1 \cdot m_0$ . . .

* f1 ,f2 .....-конечные (финитные) числа

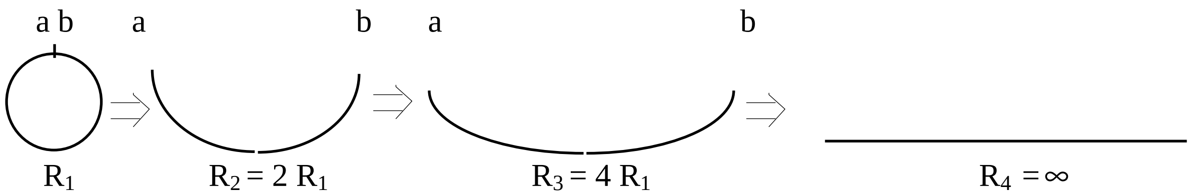


Рис. 1.2.8. Фазы преобразования окружности в отрезок.

Окружность и квадрат также возможно преобразовать друг в друга, и при этом по какому - либо геометрическому параметру тоже произойдет *бесконечный* скачок. Фазы перехода окружности в квадрат показаны на рис. 1.2.9.

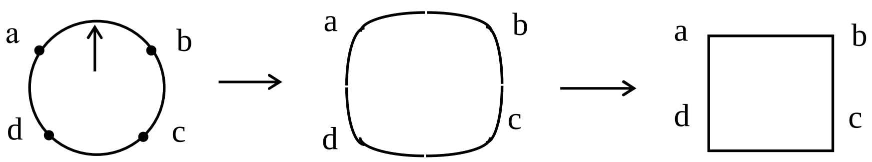


Рис. 1.2.9. Фазы преобразования окружности в квадрат.

В этом случае дуга “ab” *окружности* преобразуется в отрезок “ab” *квадрата* (они имеют бесконечно различные радиусы кривизны).

В объективном (физическом) смысле колеса и рычаги являются качественно различными объектами (хотя бы как геометрические объекты), и имеют поэтому качественно, т.е. трансфинитно различные свойства.

Кроме того, заметим, что точка, окружность, прямая - это объекты, будучи качественно различными, имеют и *разное количество независимых пространственных измерений:*

“ . ” точка - 0-мерна;

“ ——— “ отрезок - одномерен;

“ ◯ “ окружность - двухмерен.

Эти предварительные наблюдения позволяют постулировать следующие утверждения:

- объекты (также и пространства их содержащие) с разным количеством измерений - качественно (трансфинитно) отличны;

- изменение кривизны геометрического объекта изменяет количество его измерений и, следовательно, влечет за собой качественный скачок.

Особое значение в качественных преобразованиях объектов имеет *движение* в пространстве.

Так движение точки всегда порождает (в зависимости от качества движения) качественно новые геометрические объекты: отрезки, окружности, спирали. А движение отрезка в зависимости от направления движения порождает:

- отрезки другой длины при движении в том же направлении (финитное движение);

- прямоугольники - при движении в другом измерении (трансфинитное движение).

Таким образом, можно предварительно допустить также и то положение, что *движение объекта в новом для него измерении порождает для данного объекта новое качество*.

Как известно [11, 18, 34] количество трансфинитных чисел бесконечно. Минимальным из них является бесконечное счетное множество мощности ***a***, следующим идет числовая мощность - континуума **c**, далее мощность множества всех функций действительного переменного **f**.

Из теории множеств известно, что [22]:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n \ldots = \mathbf{a};$$
$$f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots f_n \ldots = \mathbf{c};$$
$$(f_1^{f_2})^{N\,f} = f_1^{(f_2 \cdot f_3 K)} = \mathbf{f},$$

где f1, f2......- конечные числа.

Эти математические факты говорят о том, что если трансфинитно завершить процесс рекурсивного повторения той или иной алгебраической операции, то получается трансфинитное число, не зависящее от конкретных финитных чисел, но зависящее только от самого действия. Следовательно, такой переход позволяет осуществить однозначное отображение того или иного действия над конечными числами в трансфинитную область. А получаемое при этом трансфинитное число названо трансфинитным образом действия - transfinod (трансфинод). Трансфинод является качественной характеристикой действия, определяющей его качественную сущность, которая при каких-то определенных условиях должна себя проявлять.

Условием такого проявления является переход от прямой операции над числами к обратной и требованием разрешения этой операции для всех возможных вариантов. В частности для вычитания таким требованием является требование разрешения вычитания из меньшего числа большее**.**

Этой цели и отвечает введение отрицательных чисел. Таким образом, появляется новое качество - “*отрицательность*”.

Итак идея самого первого качественного скачка (и наименьшего трансфинитного) есть идея “отрицательности”. Вследствие относительности различия противоположностей “*положительное / отрицательное*”, не имеет значения, какую из противоположностей принимать за положительную, а какую за отрицательную.

	Примеры “-” , ”+” качественных отличий	
	Статика	Динамика
Положительное	Наличие чего-либо	Движение в одном направлении
Отрицательное	Отсутствие чего-либо	Движение в том же измерении в обратном направлении
	наличие/долг; круг на плоскости/ круглая дыра на плоскости	вектора $+\vec{a}\,;-\vec{a}$ числа $+a;\ -a$ скорости $+\bar{v};\ -\bar{v}$ массы $+m;\ -m$ заряда $+q;\ -q$

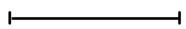
Если качество положительности K^+ считать изменяемым, а оператор вызывающий это изменение, обозначить за Z и мощностью изменения считать $\aleph_0$, то качественное уравнение изменения можно записать так:

$$Z_{\aleph_0}(K^+) = K^- .$$

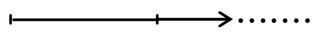
Эта запись означает, что действие на качество K^+ оператором отрицания данного качества трансфинитной мощности - $Z_{\aleph_0}$ - приводит к отрицательному качеству K^-. Обратим внимание что, качественный скачок от **положительного к отрицательному** не происходит сразу, а имеет две ступени, которые можно интерпретировать, как некий своеобразный трансфинитный цикл.

Ступень 1. Финитное отрицание данного качества (количественное изменение) . Оно фактически подготавливает количественный скачок (движение к качественному скачку по принципу дурной бесконечности).

Исходное состояние-
отрезок
x=fin

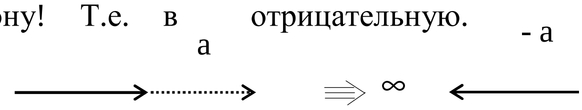


Конечное состояние-
луч
$x \to \infty$



(правая граница отрезка растет до бесконечности)

Ступень 2. Завершение процесса неограниченного роста осуществляется поворотом обратную сторону! Т.е. в отрицательную.



Прием ступени 1 - это основной прием высшей математики (используется в предельных переходах).

Прием ступени 2 - это основной прием физики, когда вводятся в рассмотрение положительные и отрицательные величины.

Схематично 1-ый трансфинитный скачок геометрически можно интерпретировать, как **движение отрицания положительного качества по окружности трансфинитного радиуса $\aleph_0$ завершающееся возвращением в то же измерение, но с противоположной стороны** (см. рис. 1.2.10).

Рис. 1.2.10. Геометрическая интерпретация 1-го трансфинитного скачка.

Этапы этого перехода в алгебраической интерпретации будут следующие:

- формирование определенности положительного качества K^+;
- введение конечных (финитных) преобразований (или операций) на положительных качествах. (В алгебре и арифметике знак “положительного” опускается).

$f_1 \cdot K^+ + f_2 \cdot K^+ = f_3 \cdot K^+$ - явная запись;

или

$f_1 + f_2 = f_3$ - здесь знаки качества K^+ опущены

- определение обратной операции к сложению-(вычитанию), для положительных чисел.
- введение качества отрицательности K^- для разрешения вычитания из меньшего большего.

Идея второго трансфинитного перехода может быть проиллюстрирована с помощью операции умножения, получаемой рекурсивным обобщением сложения.

Умножение счетного числа раз любых финитных целых чисел дает continuum мощность [22]:

$$\underbrace{(f_1 \bullet\ f_2 \bullet\ )\ f_3 \bullet\ \ldots}_{\omega} = \aleph_1 ,$$

где ω - ординальное число 1-го числового класса.

Тот факт, что действие умножения имеет трансфинод $\aleph_1$, больший, чем $\aleph_0$, говорит о том, что данная операция способна приводить к более мощным качественным скачкам при трансформации природы числа, чем сложение. Такой качественный скачок реализуется в алгебре введением “дробей”, когда требуется разрешить деление меньшего на большее. В более общей формулировке идея второго трансфинитного перехода формулируется так:

Противоположности: часть-целое, внутренее-внешнее, экзогенное-эндогенное - *качественно* отличны и имеют мощность качественного скачка $\aleph_1$ (continuum):

$Z_{\aleph_1}(K_{\text{целое}})=K_{\text{часть}}$; $Z_{\aleph_1}(K_{\text{эндогенное}})=K_{\text{экзогенное}}$ - качественные уравнения.

Таким образом, соединение из частей некоего объекта или разъединение его на части изменяет качество объекта и в гораздо большей степени, чем переход от противоположности «отрицательной» к «положительной» и наоборот.

Пример:

1. $K_{целое}$=ваза.
2. Разбиваем вазу на куски.
3. $K_{часть}$=кусок вазы.
4. “Ваза “$\neq$ “кусок вазы “ или “ваза целая “ $\neq$ “ваза разбитая” (это означает, что качество вазы резко изменилось!), и что теперь это уже не ваза.

Также и обратный анализу (разъединению) процесс синтеза вызывает качественный скачок свойств объекта. Причем понятно, что чем глубже внутренние отличия элементов целого, тем сильнее качественный скачок свойств получаем.

Пример:

1. Качества частей атома (структурный подход):
   - электрон K^{e^-};
   - протон K^{+p};
   - нейтрон K^{n}.
2. Соединяем эти три качества различных объектов в одно целое.
3. Атом = $\aleph_1(K^-, K^{+p}, K^n)$, т.е. атом качественно отличен от свойств каждого составляющего элемента.

Причем при разъединении синтезированных элементов качество целого утрачивается, остаются только качества частей. Наоборот, при соединении частей в целое качество частей сохраняется и, кроме того, ***возникает*** новое качество целого.

Геометрическая модель второго трансфинитного скачка представлена на рис 1.2.11:

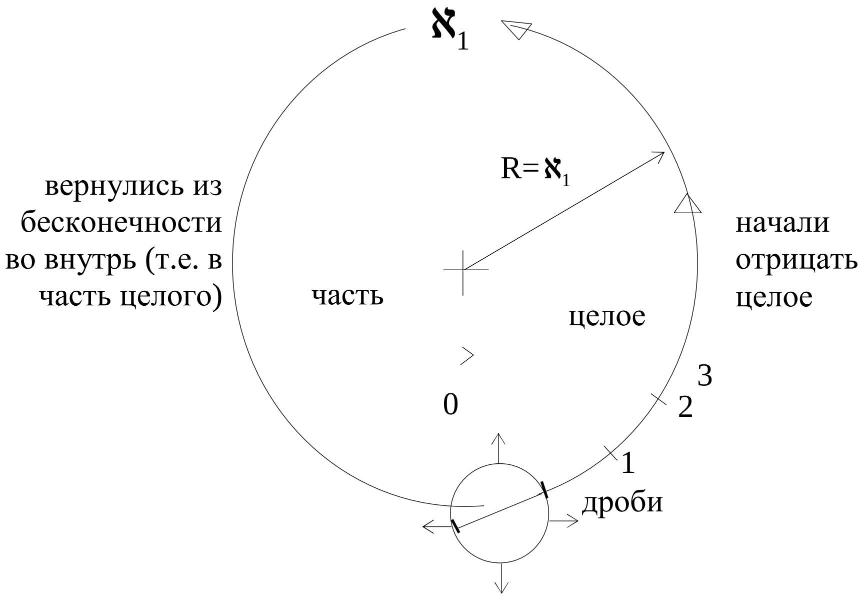


Рис. 1.2.11. Интерпретация 2-го трансфинитного скачка.

Третий трансфинитный переход получается в связи с рассмотрением отношений между *рациональным и иррациональным*, между *соизмеримым и несоизмеримым*, между действительным и мнимым, между дискретным плотным и непрерывным. Как мы уже знаем, способность порождать качественный скачок при использовании той или иной операции проявляется при переходе к обратной операции. Вполне естественно на 3-ей ступени, перечисленные противоположности получаем, используя корень и логарифм.

Трансфинитная степень полученных качественных различий по отношению к исходным, как мы уже говорили, должна приписываться величине трансфинода соответствующей прямой операции третьей ступени равного по величине $\aleph_2$:

$\aleph_2$ (плотное) =непрерывное;

$\aleph_2$ (действительное) =мнимое;

$\aleph_2$ (рациональное) =иррациональное;

$\aleph_2$ (соизмеримое) =несоизмеримое.

противоположности качественной мощности $\aleph_2$.

Трансфинитное отрицание целого или рационального приводит к иррациональному.

Пример:

1. $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$

целое иррациональное

2. $\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{1{,}41}\ldots$

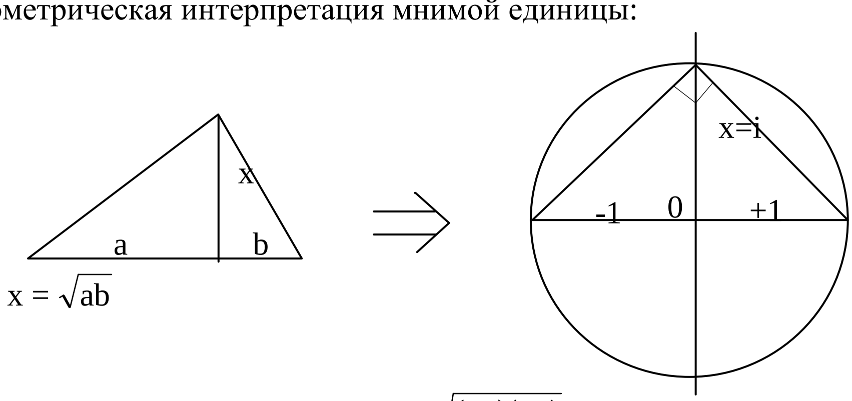
рациональное иррациональное

Трансфинитное отрицание мощности $\aleph_2$ качества *отрицательного* приводит возникновению понятия “мнимое”, т.е. существующее в ином, независимом пространственном измерении.

Пример:

1. $\sqrt{-1} = i$

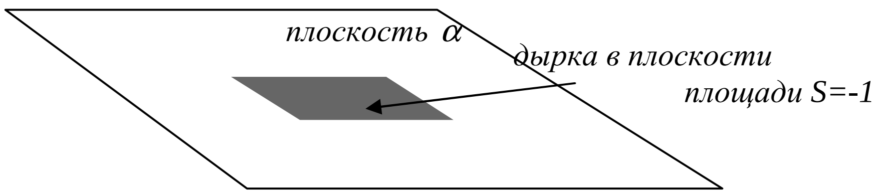
2. Геометрическая интерпретация мнимой единицы:



$$x = \sqrt{(+1)(-1)} = i$$

Рис. 1.2.12. Геометрическая интерпретация 3-го трансфинитного скачка.

1. Другая интерпретация мнимой единицы: сторона квадрата отрицательной площади (дырки в пространстве):



Сторона квадратной дырки в плоскости α *:* $a = \sqrt{s} = \sqrt{-1} = i$.

Рис. 1.2.13. Геометрическая интерпретация 3-го трансфинитного скачка.

Геометрическая интерпретация мнимой величины “требует” введения нового измерения, определенным образом связанного с исходный измерением (действительным), а именно, когда квадрат величины мнимой позволяет получить отрицательное пространственное направление.

4. $\aleph_2$ (эллипс) = гипербола.

В уравнении эллипса, если положить b=ic, то

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{ic}\right)^2=1;\ \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{c}\right)^2=1 \text{ - гипербола.}$$

Особо отметим, что трансфинитные отличия относительны, “эндогенны”, т.е. опираются в своих определениях друг на друга. Таким образом, качественный скачок мощности $\aleph_2$ означает переход к новому измерению, вполне определенным образом связанному со старым измерением. (При этом тип упорядочения множества точек “линия” переходит в тип упорядочения “плоскость”).

Литература

1. Арнольд В.И. Теоретическая арифметика. -М.: Учпедгиз, 1939.
2. Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты «Янус-К» М., 1997.
3. Бесконечность и вселенная. -М.: Мысль, 1969.
4. Богомолов С.А. Актуальная бесконечность. -СПб.: 1923, Л.М., 1934.
5. Больцано Б. Парадоксы бесконечного. –Одесса: 1911.
6. Бугаев Н.В. Введение в теорию чисел. -М.: 1865.
7. Бугаев Н.В. (1837-1903) ИМИ-29 Историко-математические исследования, 1985.
8. Бугаев Н.В. Основы эволюционной монадологии. -М.: 1893.
9. Бунин В.А. Сверхстепень как новое математическое действие для описания быстропеременных физических процессов В сб. МОИП «Математическая физика. Электродинамика. История физики» -М.: 1967.
10. Бунин В.А., Чудинов В.А. Об использовании в задачах прикладной электродинамики чисел новой природы. В сб. МОИП «Новые вопросы электродинамики» М.: 1976.
11. Бурбаки Н. Теория множеств. -М.: 1965.
12. Вейль Г. Симметрия. -М.: 1968.
13. Волошинов А.В. Пифагор. Союз Истины Добра и Красоты. -М.: Просвещение, 1993.
14. Голицын Г.А. Информация и законы эстетического восприятия. -В кн.: Число и мысль, вып. 3. -М.: Знание, 1980.
15. Граве Д. Энциклопедия математики. –Киев: 1912.
16. Диалектика пространства. СПБ.: 1994.
17. Жегалкин И.И. Трансфинитные числа. -М.: Университет, 1907.
18. Кантор Г. Труды по теории множеств. -М.: Наука, 1985.
19. Кантор И.А., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. -М.: Наука, 1973.
20. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум гипотеза. -М.: Мир, 1969.
21. Колокольчиков В.В. Отображения от чисел до функционалов УРСС М., 1999
22. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. -М.-Л.: 1937.
23. Клайн М. Математика, поиск истины. -М.: Мир, 1988.
24. Лосев А.Ф. Миф-Число-Сущность. -М., Мысль, 1994.
25. Лосев А.Ф. Бытие-Имя-Космос. -М., Мысль, 1998.
26. Лосев А.Ф. Очерки античного символизма и мифологии. -М.: Мысль, 1998.
27. Лосев А.Ф. Структура и Хаос. -М.: Мысль, 1998.
28. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. -М., 1975.
29. Мир как единое целое. -Под ред. Бортурова О. Вологда: Русь, 1997.
30. Музыка и математика (под ред. Г. фон Карояна). -М.: Наука. 1994.
31. Пуркет В. Георг Кантор. -Харьков: Основа, 1991.
32. Шестаков В.П. Гармония как эстетическая категория. -М.: 1983.
33. Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. -М.: 1966.
34. Хаусдорф Ф. Теория множеств -М.-Л.: 1937.