1.3. Трансфинитное число как мера качественных различий

> **“С давних пор никакой другой вопрос так глубоко не волновал человеческую мысль, как вопрос о бесконечном; бесконечное действовало на разум столь же побуждающе и плодотворно, как едва ли действовала какая-либо другая идея; однако ни одно другое понятие не нуждается так сильно в разъяснении, как бесконечность”.**
>
> **Д. Гильберт [17]**

Вводные замечания

Состояние вопроса по интерпретации.

Интерес человечества к проблеме Бесконечности известен с глубокой древности, и это не удивительно. Ведь с этим понятием имеют глубинное родство представления человека о вечности, свободе, неисчерпаемости самого познания, о невыразимом совершенстве красоты, беспредельности видимого Мира. Выдающемуся математику 20 века Д. Гильберту теория трансфинитных чисел, созданная Г. Кантором, представлялась «…заслуживающим удивления цветком математического духа и вообще одним из высших достижений чисто умственной деятельности человека» [17]. Тема интерпретации как следующий вполне естественный шаг в развитии идеи *актуальной бесконечности* в этой проблеме занимает особое положение, и предлагаемое здесь возвращение к обсуждению вопросов об интерпретации имеет, как нам представляется, к настоящему времени уже достаточно зрелые предпосылки.

Во-первых, к началу 21 века была показана состоятельность теории множеств, как математической дисциплины, центральным понятием которой является Актуальная бесконечность. Это явилось, на наш взгляд, вопреки широко распространенному до XX века мнению о недоступности Бесконечности человеческому Разуму (означающее, что свободно, без противоречий мыслить Бесконечность не возможно) серьезным свидетельством того, что Бесконечность все же осуществима как разумное понятие, и более того, доступна рассудку, дискурсивному мышлению[1]. В течение прошлого века теория множеств выросла из своего начального «наивного» состояния, и уже к началу 70-х была показана возможность ее непротиворечивой реализации в различных нестандартных вариантах [3,4,16,29].

Во-вторых, при построении той или иной системы знания постоянно ощущается потребность в понятии бесконечности, а ее последующее использование обнаруживает и практическую полезность (что произошло, например, с математикой). Ее использование признается значимой даже, несмотря на известные «страдания», которые приходится при этом получать от множества сопутствующих теоретических курьезов и логических затруднений [3,4].

Наконец, в-третьих, до сего дня не остается без внимания не дающая всем покоя гипотеза о том, что не только духовная и интеллектуальная сферы деятельности человека (что кажется наиболее вероятным), но и сама физическая реальность несут в себе атрибуты бесконечности [3,3,22,34]. Это обстоятельство также разогревает намерение основательней разобраться в упомянутой теме, ввиду важности открывающейся в этом случае перспективы ее использования в естественных науках. Тем более, что на сегодня реальных естественнонаучных доказательств присутствия или отсутствия Бесконечности в Мире ни одной отраслью человеческого знания предъявлены не были.

Все это вместе является постоянным побудительным мотивом возвращения к теме Бесконечности в различные исторические периоды времени. Совершенно ясно, что понятие Бесконечности действительно нуждается в дальнейшей более глубокой разработке. Вместе с тем,

---

[1] Тем не менее, некоторые современные ученые предлагают оставить эту тему в покое, как чрезмерно экзотическую и неудобоваримую в своем противостоянии всякому «здравому смыслу» [3,4,20,41]. Негативным течениям противостоит другой лагерь математиков, отстаивающих правомерность теории множеств и работающих в различных направлениях ее дальнейшего развития [3,4,16,29].

очевидно и другое, что для реального разрешения проблемы Бесконечности и ее интерпретации нужны новые идеи, новые принципы, и, если угодно, - новые технологии мышления.

Какое впечатление на протяжении многих веков возникло о бесконечности, в особенности в части ее интерпретации? Какие характерные ее свойства были проявлены в первую очередь?

В интерпретациях проявление бесконечности чаще всего увязывают с *безграничностью*. В связи с этим ее соотносят или с чем-либо неопределенно большим, или не до конца понятным. Считают, например, ее относящейся ко всей Вселенной в целом, имея ввиду гипотетическую безграничность последней в пространстве и во времени; или полагают, что Бесконечность можно найти в неограниченной делимости структур материи видимого мира, и т.п. (см. [3,4,24]). История знает много различных авторов - богословов, философов, математиков, - работы которых появлялись в разные периоды времени, и в которых в той или иной мере освещались различные аспекты и подходы к разрешению обсуждаемой здесь проблемы [3,4,6,7,14,18,25,26,35]. Однако и в их трудах невозможно было обнаружить признаков сколько-нибудь удовлетворительного ее разрешения. Отсутствовали даже указания на тот путь, по которому следовало бы двигаться для достижения указанной цели.

Если этот скромный набор приемов видения Бесконечности в интерпретации дополнить известными взглядами древних китайцев, греков и индусов [23,34,35], все же относившихся к бесконечности, как нам представляется, более справедливо, как к источнику **неистощимости и неисчерпаемости** мира, а за Беспредельностью признававших право даже **первоисточника и первосущности всего конечного** (достаточно вспомнить высказывание Анаксимандра: «…Бесконечное …божественно, ибо бессмертно и неразрушимо» [1]), то на этом обзор подходов по теме естественнонаучных интерпретаций бесконечности можно было бы в основных чертах и завершить.

Все это свидетельствует о том, что сегодня для разрешения проблемы интерпретации отсутствуют какие бы то ни было естественнонаучные предпосылки, выходящие за рамки известной богословской или философской аргументации. Отсутствует собственно и сама методология решения указанной проблемы.

Из известных наук, наиболее знакома с понятием бесконечность математика. Хотя тоже с оговоркой, т.к. ею освоена не сама Актуальная бесконечность, а, если так можно выразиться, только стремление к ней. В анализе используется так называемая *не собственно бесконечность* в виде хорошо всем известной из курса высшей математики переменной величины, стремящейся к бесконечности и обозначаемой символом **«** $\rightarrow \infty$ **».** Тем не менее, математика из одного только *стремления к бесконечности*, как нам кажется, извлекла для себя много полезного, как в теоретическом, так и в практическом, прикладном плане.

Таким образом, Актуальная бесконечность, разработанная Г. Кантором до уровня математического понятия в виде трансфинитного Числа, остается до сего дня современной наукой невостребованной, и только до некоторой степени обслуживает основания математики. Иначе говоря, с бесконечностью такого типа как *актуальная* в смысле ее принадлежности к Natura Naturata *принципиально* неизвестно что делать. Ситуация в таком положении удерживается уже с начала XX века. Некоторым ученым даже кажется, что начавшееся 100 лет назад математическое освоение актуальной бесконечности авантюрно, а уж поиск ее объективной интерпретации тем более лишен каких бы то ни было оснований. Им представляется, что лучше эту тему предать забвению, как чрезмерно экзотическую и неудобоваримую в своем противостоянии всякому здравому смыслу, и в обозримом будущем к ней не возвращаться [3,4,20].

Свойства Актуальной Бесконечности, и подходы к ее интерпретации
Бесконечность и безграничность. Бесконечность и качественная трансформация вещей.

«Мы знаем, что есть бесконечность,
но мы не знаем ее природы...»

Б. Паскаль [42]

Целью настоящей работы, является, вопреки известным опасениям, представить на суд читателя убедительные аргументы для утверждения, что Актуальная бесконечность присуща любым видам действительности, и что она же, оформленная как число, может быть использована в виде количественной меры **качественных** различий, трансфинитных по своей природе. Здесь же обсуждается методология приведения во взаимное соответствие хорошо всем известных качественных различий и вполне определенных кардинальных чисел. Иначе говоря, показывается, что трансфинитные числа вполне возможно использовать по отношению к тем или иным **качествам** в виде специфической количественно-трансфинитной меры. Т.е., предлагается измерять ими качественные состояния вещей, и соответственно исчислять их качественные трансформации друг в друга применительно практически к любым видам действительности, подобно тому, как в современной науке при изучении и моделировании самых разных явлений природы аналогичное применение находят финитные числа.

Основы предлагаемого здесь подхода по интерпретации Бесконечности были заложены выдающимся математиком 19 века Г. Кантором (1845-1918). Он явился создателем основ современной теории множеств и автором, как сказал о ней Гильберт [17], в высшей степени плодотворной идеи об Актуальной Бесконечности, как о некоей завершенной целостности, и представлении ее в виде особого рода Трансфинитного числа. Создание основ теории множеств им было завершено во второй половине 19 века; оно потребовало дополнить и переработать некоторые фундаментальные понятия математики, в частности, понятие Числа.

В результате миру были представлены две беспрецедентные возможности: первая - непротиворечиво мыслить актуальную бесконечность, а вторая – различать ее типы и оперировать с ними как с числами. Это именно и иллюстрирует созданная Кантором алгебра трансфинитных чисел. Алгебра открывает реальную возможность проведения с ними вполне определенных математических операций, а также показывает, что такие числа могут быть по аналогии с натуральным рядом упорядочены в некую безгранично возрастающую шкалу, в недостижимой высоте которой находится Абсолютное.

В интерпретации Актуальную бесконечность сам Кантор считал принадлежащей ко всем видам реальности[2]. А в природе вещей (in Natura Naturata -лат.), т.е. в видимом, сотворенном мире, по крайней мере, двум феноменам: человеку, - его внутреннему миру, его психической деятельности, и всем без исключения явлениям жизни [22]. Возможность постижения этой истины и ее практическое внедрение представлялась Кантору реальным и весьма важным делом, т.к. означало бы, в его понимании, приобретение человечеством о Божественном творении (в том числе и с помощью разработанной им математики) более совершенного знания.

Однако намерению Кантора не было суждено свершиться при его жизни. Последующие поколения математиков 20 века работали в основном над проблемами строгости и допустимости методологии теории множеств, ее логической основательности, пытаясь по возможности освободить ее от внутренних противоречий и парадоксов, и тем самым сделать более состоятельной как математической теории [13,16,27,29,30,35,40].

Знакомство человечества с Бесконечностью на протяжении многих веков обнаружило на первых порах одно ее как будто очень «неприятное» свойство. А именно, там, где она рождается или воспроизводится, там вынужденно разрушаются границы вещей. Ее появление приводит к исчезновению не только их **определенного** состояния, но даже к исчезновению с видимого горизонта их бытия вообще, а, в другом варианте, преобразованию этого бытия в какое-то совершенно иное неизвестное, если не сказать сильнее - неосуществимое состояние. В равной мере это относится и к **формам** всех видимых или мыслимых предметов. В самом деле, достаточно начать мысленно раздвигать границы того или иного предмета до бесконечности,

---

[2] «Я различил актуально бесконечное в трех отношениях: *во-первых*, поскольку оно осуществляется в высочайшем совершенстве, независимом внемировом бытии, *in Deo*, где я называю его *абсолютно бесконечным* или просто *абсолютным*; *во-вторых*, поскольку оно обнаруживается в зависимом сотворенном мире; *в-третьих*, поскольку мышление может достигнуть его *in abstracto* как математическую величину, число или порядковый тип». (Г. Кантор *Труды по теории множеств*, -М., Наука, 1985, с. 268).

чтобы легко обнаружить переход его исходно яркого образного представления в какое-то неопределенно-невообразимое состояние[3].

И действительно, вещь определена, когда по самому смыслу этого слова имеет неким образом очерченные **пределы** своего бытия, и сохраняет себя в таком виде, по крайней мере, по отношению к другим себе подобным вещам. Беспредельность напротив, требуя для себя, как всем казалось и кажется до сих пор, отсутствия границ, или растворения их в бесконечности, становится в этом смысле синонимом неопределенности и неразличимости, проистекающих из необходимости снятия границ, из которой затем далее и проистекает смысловая неразличимость и тьма. Таким образом, **исторически Бесконечность оказалась ассоциированной более всего со способностью порождать неопределенность, неразличимость и неоднозначность.**

Весь этот, так сказать, действительно реальный негатив инициировал в свое время настойчивое желание многих математиков и физиков противиться введению в обиход естественных наук понятия актуальной бесконечности, и подогревал желание по возможности устраниться от ее использования в науке.

Тем не менее, кроме указанного эффекта исчезновения, Н. Кузанским и Б. Больцано [6,26]) был отмечен еще один необычный эффект проявления бесконечности. Он состоит в том, что при бесконечном преобразовании хотя бы некоторой части границ вещи происходит, если и не полное ее исчезновение, то, по крайней мере, очень глубокое изменение ее свойств. В этом, кстати, и содержится значительный намек на истинное предназначение Бесконечности, состоящее в том, что она способна не только до основания разрушать границы, но и инициировать глубокие изменения свойств вещей.

Таким образом, при желании у Бесконечности можно все же, даже без предварительного анализа, заметить наличие кроме очевидной разрушительной, еще и (как бы потенциально возможную) созидательную функцию, которая, как это совершенно понятно, на начальном этапе наблюдения свойств бесконечности оказывается скрытой, менее ярко выраженной и очевидной. Это позволяет буквально методом от противного, сформулировать некий рабочий антитезис в отношении первичной гипотезы о сущности бесконечности. А именно, если у бесконечности явно обнаруживается способность разрушать границы вещей, то не поискать ли в ней прямо противоположное неявное свойство, - их созидать? Вопрос лишь заключается в том, чтобы предложить конкретное осуществление этого намерения для того или иного случая. Единственно в чем в такой ситуации не приходится сомневаться, что подобная «технология» должна иметь простое решение, равно как и фундаментальное значение.

Перейдем непосредственно к теме исследования, и начнем с анализа возможных вариантов синтеза двух фундаментальных противоположностей **бытия и небытия,** имеющих к определению понятия числа самое прямое отношение. В самом деле, что есть их *единство*? Возможно ли оно вообще? Ведь бытие и небытие настолько полярны по своему смыслу, что кажется, будто отрицают друг друга до абсолютной несовместимости, и существовать вместе, как некое единое целое не могут. Тем не менее, оказывается, что единство категорий бытия и небытия возможно, и более того это единство возможно в нескольких вариантах. (*Наиболее полное исследование и подробное обсуждение этого вопроса можно найти в различных работах Лосева* [32-35]). Коснемся только той их части, которая прямо связана с интересующей нас темой. Акцентируя внимание на разных аспектах рассмотрения этого единства не трудно увидеть, что различными ипостасями этого единства будут: в аспекте бытия - **Число**; в равновесии бытия и небытия – **Граница**; в целом (как единое целое, состоящее из того и другого) – **Становление** [32-35].

Из этого следует, что, во-первых, - **категория определенности вещей *вторична*.** Она возникает в результате ограничения, т.е. созидания (чаще всего называемого в смысловой сфере полаганием) соответствующих границ, как результат создания необходимого для этого порядка,

[3] Исключение из этого правила составляет **очевидная наблюдаемость** континуального отрезка прямой линии, который по виду хотя и ограничен, но все же признается состоящим из бесконечного множества точек. Здесь к досаде противников актуальной бесконечности приходится все же признавать не только актуальную бесконечность существующей, как завершенную и обозримую цельность, но еще и в парадоксальном соседстве с ограниченностью, ярко выраженной финитностью, содержащейся, по крайней мере, в длине этого отрезка.

который немыслим, что очень важно, без непосредственного использования в этом процессе Числа [32-35].

Во-вторых, открытие трансфинитных чисел, как чисел качественно иной в сравнении с конечными природы, знаменует собой в этом случае начало нового этапа в постижении такого важного понятия как собственно сама определенность вещи. Иначе говоря, в свете понятия актуальной бесконечности можно надеяться получить более совершенное толкование сущности множества вещей, принимая во внимание присутствие в них не только финитных, но и трансфинитных атрибутов. В особенности это важно при изучения законов возникновения и трансформации индивидуальности и качественного обличия вещей. Ведь до этого момента, в рамках традиционных технологий современной науки, определенность чего-либо всякий раз мыслится, и далее уточняется, раскрывается, моделируется только благодаря использованию свойств хорошо всем известных **конечных** чисел. Свойства изучаемых таким способом явлений при этом как бы проецируются на свойства финитных чисел, получая от них конкретное наполнение содержанием и смыслом.

И, наконец, в-третьих, факт происхождения смысла таких категорий как Число, Граница и Движение от одного общего категорийного источника, подчеркивает, в особенности в последнем своем пункте, что к основаниям мироздания, к глубинам смысловой и объективной действительности имеет отношение не только Число (мнение идущее от пифагорейской школы VI в до Р.Х.). Но, что не менее важно, к этому же в равной мере имеет отношение и **движение** [32-35].

Отсюда намечаются два нетривиальных и не вульгарно прямолинейных разрешения проблемы интерпретации актуальной бесконечности, в противовес упомянутым ранее, и связанных с обезграничиванием. Первое состоит в том, что бесконечность должна каким-то образом содержаться в специфике наложения и преобразования границ вещи. Бесконечность, т.е. должна являться тем самым первоисточником, из которого любое Нечто собственно и получает то или иное определенное содержание, форму и качество. Равно как и обратное действие, направленное на полное снятие, уничтожение уже известных границ данной вещи, и ведет вполне понятно к прямо противоположному эффекту проявления той же бесконечности. Это и было исторически в первую очередь обнаружено. Тем более, что для проведения процедуры снятия границ недостатка в исходном материале в виде конечных, ограниченных объектов не было. В нашем мире они в избытке под рукой.

Указание на первосущность Движения в формировании качественного облика вещи наряду с Числом, также имеет не последнее значение в формировании его определенности. Его следует отнести ко второму весьма важному направлению поиска интерпретации актуальной бесконечности. В одной из своих работ, в частности, Лосев прямо увязывает возникновение какого-либо определенного бытия с движением. «Нужно осознать, - говорит он, что … «в становлении – зародыш всех будущих качественных оформлений (с.423) [32]». Это позволяет прийти к ясному пониманию того факта, что качество – есть динамическая сущность. Далее он пишет, что «вещь характеризуется не одними только текущими процессами своего существования, но что существует в ней и некоторый определенный результат этих процессов в виде тех или иных устойчивых качеств вещи (стр. 432) [32]».

Обратимся непосредственно к вопросу о том, как именно происходит воплощение бесконечных отношений в конечной, и, следовательно, в той или иной конкретной выразительной форме, относя к ней в первую очередь качественное обличие вещей, которое само по себе и универсально и вездесуще. И, действительно, его можно наблюдать и в чисто математической, смысловой сфере, и в сфере объективной реальности, в физическом мире, и, наконец, в ритмических рисунках музыки, в ритмическом дыхании жизни, т.е. во всем известном сегодня многообразии структур движения.

Актуальная бесконечность в отношении раскрытия смысла той или иной качественной определенности открывает совершенно иные возможности. Сам факт существования трансфинитных чисел как бы приглашает реально использовать их для той же цели.

Таким образом, необходима более углубленная разработка понятия бесконечности. В особенности это касается ее интерпретации. Только двигаясь по пути конструктивной разработки применительно, в особенности, к проблемам физики и всех естественных наук, можно надеяться на действительное разрешение многих ее парадоксов. И только тогда, когда подобное намерение будет реализовано в полном объеме, обоснованно раскроется созидающая значимость актуальной бесконечности и уместность всех ее необычных свойств и порождаемых ею парадоксов. Тогда только и можно будет надеяться на иное отношение к толкованию парадоксов теории множеств, и отношению к ним не как к досадным и непреодолимым препятствиям, а как к специфическим указательным знакам на критические точки познания, имеющие для человечества то или иное непреходящее значение.

Число, действие, качество

Число и действие. Смысловые моменты понятия числа. Действие как источник определений и формализаций

«…Мы знаем, что Вселенная бесконечна, но не знаем в каком именно смысле»

Г. Наан [37]

Основной тезис данной работы состоит в том, что Бесконечность является мерой качественных различий вещей. Уяснение и раскрытие этого факта требует принять во внимание и более тщательно исследовать две вещи. Во-первых, что число находится в теснейшей связи с понятием действия и в совместном развитии вместе с арифметическим действием с необходимостью приводит ко внедрению в понятийную структуру числа понятия **качества**. И в дальнейшем своем существовании Число уже не может быть оторвано от действия ни формально, ни содержательно.

Во-вторых, к определенному фазису развития понятия числа имеет уже непосредственное отношение актуальная бесконечность, так как является своеобразной количественной характеристикой степени содержательной наполненности того источника, из которого появляется всякое новое качество числа, именно - действия. Через действие над числом именно, как мы понимаем, и находит свое реальное воплощение актуальная бесконечность, как необходимая принадлежность качественного воплощения в той или иной выразительной форме.

Какие смысловые моменты Числа следовало бы признать центральными при обсуждении интересующей нас темы? Число есть, как известно, есть особый род многоединства. По определению, Число есть такое соединение многого в одно, когда к элементам многого в числе предъявляется только требование положенности, существования, наличности и только. Главное, чтобы элементы многого просто существовали, были бы различимы мыслью и не более того. Все остальное, т.е. порядок расположения элементов в числе и качество каждого элемента из рассмотрения исключаются и на смысл числа не

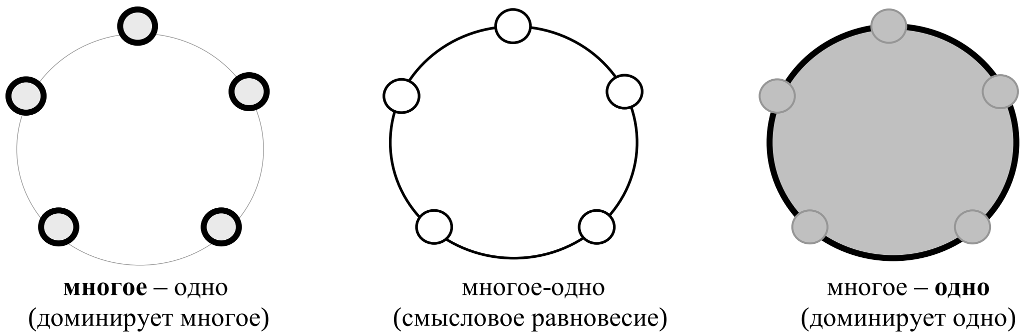


Рис 1. Геометрическая интерпретация смещения смысловой значимости от целого к части в понятии числа «5».

влияют. Иначе говоря, для образования числа требуется только некое совершенно абстрактное множество различимых элементов, собранных в единое целое. Это и означает, что смысл, числа в арифметике имеет два важнейших с точки зрения прослеживания особенностей его дальнейшего развития стартовых момента – множественность и единство, цельность. На цельность, т.е. на момент монадоподобности числа мало обращают внимания. Традиционно в смысловом строении числа принимается во внимание более всего множественность, т.к. в приложениях всех в основном интересует именно она. В связи с этим рассмотрим технологии получения новых чисел, обращая внимание на функциональную роль в этом процессе арифметического действия.

Самое простое действие, позволяющее получить весь натуральный ряд чисел, есть сложение: a+b=c (см. табл.1). Нейтральный элемент сложения назван нулем, т.к. его использование в сложении не изменяет результата: a+0=a. Итак, арифметическое действие есть средство порождения новых чисел, и для этого достаточно его просто сколь угодно долго повторять. Однако ситуация с порождением чисел резко изменяется, как только происходит переход к действию обратному сложению – вычитанию. Бесконечный набор натуральных чисел не предоставляет возможности вычесть из 0 какое-либо положительное число: 0 – a =? Отсюда и возникает необходимость вводить в число новое качество, а именно качество отрицательности. При этом, разумеется, и все остальные числа получают качество положительности. Т.е. обнаруживается, таким образом, факт возникновения противоположностей, в частности противоположностей положительного и отрицательного.

Итак, что нужно было сделать, чтобы эти противоположности получить? Первое – перейти от прямого действия к обратному, и затем потребовать обеспечить возможность для проведения вычитания из меньшего числа большее. Это и приводит к расширению понятия числа. Аналогичная ситуация наблюдается и во всех остальных случаях, т.е. и при умножении, и при возведении в степень, и при возведении в сверхстепень и т.д. Качественные расширения понятия числа, которые при этом пришлось вводить представлены в табл.1.

Отсюда следуют несколько важных выводов:

- качество числа рождается благодаря использованию обратного действия соответствующей ступени;
- качество числа принадлежит числу в целом, т.е. соотносится с ним как с целостным, *монадоподобным* образованием;
- определение всякого нового качественного оформления числа и его формализация без использования обратного действия невозможны[4];
- на более высоких ступенях обобщения действия сложения, вновь вводимые качества чисел приобретают все более уникальные, кажущиеся поначалу из ряда вон выходящими, свойства.

---

[4] Из всех чисел, которыми сегодня оперируют не используя то или иное действие в символической форме, можно считать, пожалуй, *только малые числа натурального ряда в пределах одного десятка*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7… . Все остальные так или иначе и определяются и формализуются через тот или иной (осознаваемый, а иногда и не осознаваемый) конкретный *способ их порождения*, называемый *арифметическим действием (или арифметической операцией):*

Пример 1. ***Большие* натуральные числа.** Всякое большое натуральное число N (в отличие от малых чисел) более удобно и определяется и воспринимается, как некое *малое* **n**, к которому многократно **прибавляют 1**. Этот простой пример показывает, как мы видим, необходимость при определении того или иного достаточно большого числа использовать *действие* «прибавления»).

Пример 2. ***Большое* число N= 10^{10}**, записанное в таком виде, с очевидностью требует для своего и определения и формального представления *операции* возведения в степень.

Пример 3. **Минус единица «-1»**– является числом вообще нового качества по отношению к любому натуральному положительному числу. Это становится вполне очевидным, если в записи числа «–1» заметить сокращенный вариант более полной записи с использованием действия вычитания вида «0-1».

Пример 4. Любое **рациональное число** вида m/n есть прямое порождение *операции* деления.

Пример 5. **Мнимая единица i=**$\sqrt{0-1}$ определяется и оформляется уже не с помощью одного, а *двух действий*: вычитания и корня.

Пример 6. **Иррациональное число** $\sqrt{2}$ по определению порождается *операцией* корня.

Пример 7. **Трансцендентное число e (**основание натуральных логарифмов**).** Для своего определения оно требует *бесконечного* ряда сразу *трех* действий:

$$e=1+(1/2!)+ (1/3!)+(1/4!)+ (1/5!)+\ldots$$

Табл.1.

С т у п е н и о б о б щ е н и я с л о ж е н и я					
		I	**II**	**III**	**IV**
Действия	*стандартное обозначение*	$\mathbf{a+b}$	$a\cdot b$	a^{b}	${}^{b}a$ …
	нестандартное обозначение	$\mathbf{a\ \underline{1}\ b}$	$a\ \underline{2}\ b$	$a\ \underline{3}\ b$	$a\ \underline{4}\ b$…
Качественно новые числовые противоположности		**Отрицательные-положительные**	**Целые-дробные**	**Рациональные-Иррациональные** **Действительные-мнимые**	**?…**

Таким образом, у арифметического действия просматриваются несколько значимых для саморазвития собственно самого понятийного аппарата арифметики функций и других ее приложений:

- Первая из них показывает, что действие способно из некоторого известного набора чисел определенного качества получать новые числа другие по величине, но того же качества. Благодаря такому простому приему происходит наращивание количества чисел на почве изменения их модуля, при этом, конечно, область их исходных значений расширяется. Сами действия в этом случае используются для первично-конструктивного оформления числа:

$$10^{7},\ 3/2,\ \log_2 3,\ \sqrt{2}\ \ldots\text{и т.п.};$$

- Вторая функция действия, как уже упоминалось, состоит в инициации и обеспечении качественного расширения понятия числа, а также в его символическом оформлении. Третья функция действия состоит не только в способности порождать, преобразовывать и отображать числа, но и быть отправной точкой порождения других действий, а именно обратных и действий высших ступеней;
- Всякое прямое действие становится источником для введения целого ряда новых действий: действий обратных и действий более высоких или низких ступеней;
- С помощью действия можно получать новые трансфинитные числа.

Трансфинод как трансфинитная мера качественной определенности

Что есть трансфинод. Качество и трансфинод. Примеры соответствий качественных различий и трансфинодов

Как известно, получение действий высших ступеней осуществляется через технологию рекурсии, т.е. в результате самоповтора действия, повтора самозамыкания результата в исходные операнды. Таким способом получают из сложения умножение, возведение в степень, сверхстепень и т.д. – т.е. все действия высших ступеней обобщения сложения. Сам процесс рекурсии в этом отношении может быть рассмотрен как своеобразный дискретный процесс становления. Однако известно, что появление становления, т.е. процесса безграничного изменения, требует всегда изыскания средств его завершения, останова, что позволяет извлечь из процедуры завершения и некий полезный результат.

Предлагается рассмотреть два способа завершения условно называемых нами – финитный и трансфинитный. В ином толковании оба эти способа фактически известны. В данном случае их предлагается их увидеть в ином свете, относящемся именно к проблеме актуальной бесконечности. К *финитному* приему мы относим известный способ перехода от действия низшей ступени к действию высшей. Такой переход обеспечивается прерыванием рекурсии, т.е. прерыванием повторов в проведении того или иного прямого действия. Прерывание, собственно, и завершает становление, прекращает его повторы и ограничивает их некоторым конечным числом b:

$$\mathbf{a+b} \qquad \underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{b} = a\cdot b; \qquad \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{b} = a^b; \qquad \underbrace{((a^{a})^{a})^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}})^{a}}_{b} = {}^{b}a\,.$$

Исходное, базовое действие **Повторы действий** **Действия высших ступеней**

Финитная разновидность прерывания – основа для получения действия высшей ступени. Она названа финитной, потому что прерывание процесса в этом случае обеспечивается финитным числом b. Напротив, не прерывая этот процесс самоповторов в финитной области, возможно его продолжить в трансфинитную область. И назвать его трансфинитным. Это название уместно и с точки зрения трансфинитности количества самих повторов, и с точки зрения получаемого в результате трансфинитного числа. Для обеспечения однозначности результатов во всех случаях использования различных действий остается только фиксировать трансфинитное число повторений, ограничив его, например, минимальным счетным алефом:

$$\underbrace{a+a+a+\ldots}_{\aleph_0} = a\cdot\aleph_0 = \aleph_0; \quad \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots}_{\aleph_0} = a^{\aleph_0} = \aleph_1; \quad \underbrace{((a^{a})^{a})^{a^{\cdots}}}_{\aleph_0} = \aleph_2 \qquad (*)$$

Из теории множеств [15] следует, что полученные в выражении (*) алефы не зависят от используемых при этом конкретных финитных чисел, и, следовательно, при фиксированном числе повторений зависят только от действия. Это дает основание считать, что полученные трансфинитные числа в результате определяются только используемым в результате трансфинитной рекурсии действия, а еще более точно – от ступени его обобщения. Это очевидно, т.к. изменение ступени действия будет вести к изменению результата. Получаемые в результате числа предлагается **назвать трансфинитными образами действий (сокращенно - трансфинод)**. Результаты расчетов трансфинодов T(s) действий первых пяти ступеней приведены на рис.2, а в табл.2 приведены они приведены совместно с характерными качествами чисел, инициированными теми же действиями.

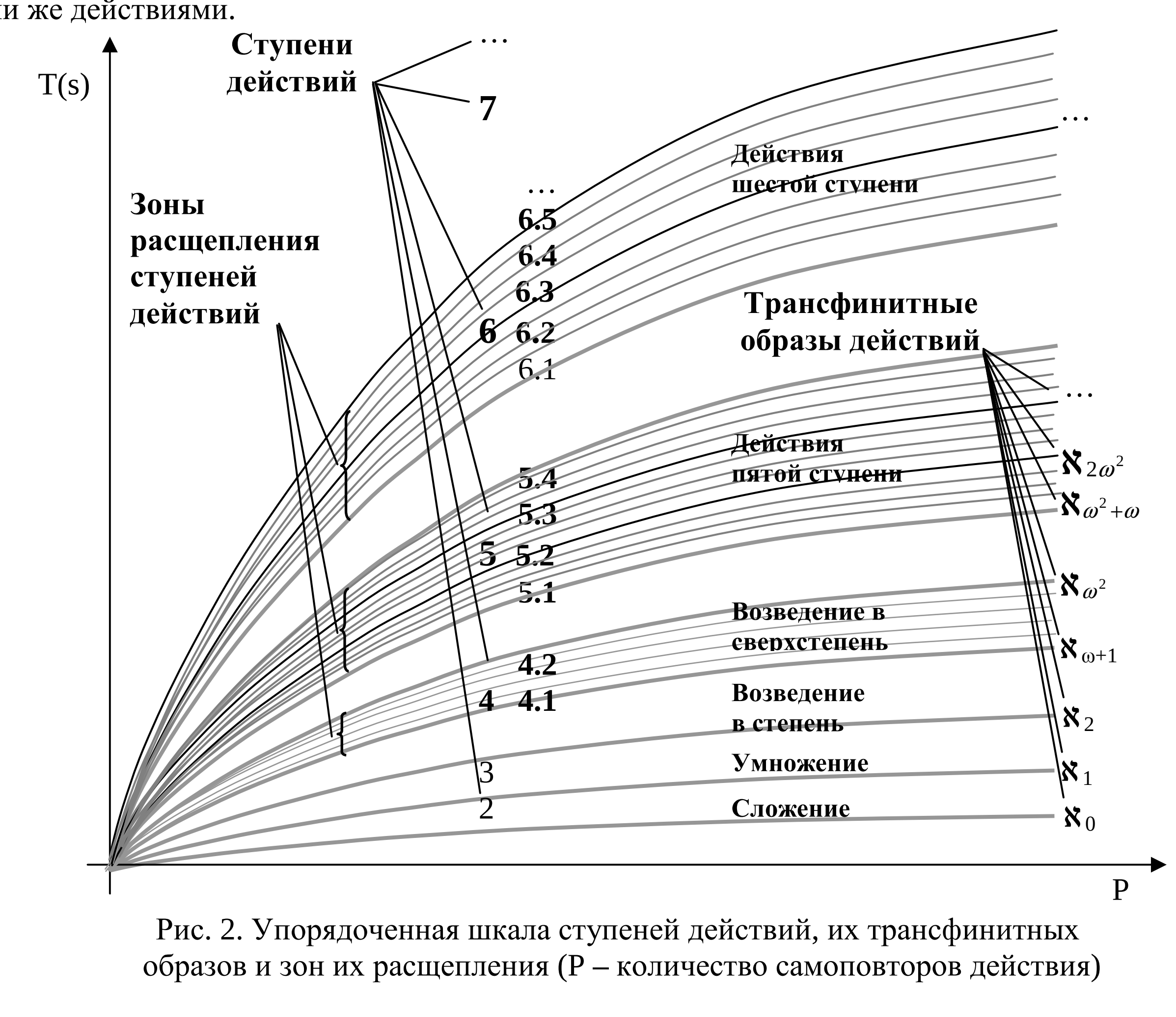


Рис. 2. Упорядоченная шкала ступеней действий, их трансфинитных образов и зон их расщепления (P – количество самоповторов действия)

Все это означает, что таким способом достигается установление однозначного соответствия между шкалой прямых действий и трансфинитными числами, занимающими в шкале трансфинитных алефов вполне определенное место. Более того, предлагается полезное использование этого отображения, а именно полезное в аспекте количественно-трансфинитной оценки качественных различий вещей. Какие же основания можно предложить для подобного утверждения?

Оно вытекает из сопоставления двух фактов (см. рис.3), а именно, что действие способно порождать качественные различия в числах, и что действие способно также в результате бесконечного повторения порождать трансфинитные числа. Таким образом, оказывается, что в понятийную структуру арифметического действия заложены два вида

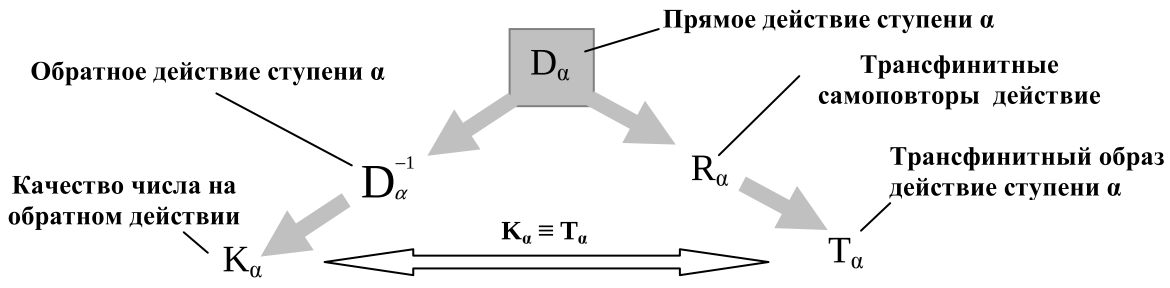


Рис. 3. Схема взаимосвязей понятий качества числа и трансфинитного образа действия ступени α

смысловой энергии. Первая – бесконечная по своему существу - разделять нечто на качественно полярные противоположности, а вторая – прямая по своему назначению - достигать вполне определенного актуально бесконечного результата при счетном самоповторе. Эти два вида энергии как исходящие из одного источника и отражающие разные аспекты одной сущности предлагается считать тождественными[5]. Иными словами это означает, что

актуальная бесконечность есть мера качественных различий вещей и их преобразовательных трансформаций.

Отсюда напрашивается и еще более сильный вывод в оценке природы Актуальной бесконечности - прямо противоположный общепринятым тенденциям, - и, кстати, наиболее близкий интуитивным представлениям древних математиков и философов, а именно, что актуальная бесконечность и есть первоисточник любого вида определенности.

---

[5] В упрощенной аналогии с физической реальностью подобная ситуация выглядела бы так. Представим себе некоего гиганта способного растянуть **бесконечно** тугую пружину на некоторую величину. Он же, развивая ту же энергию, может подбросить вверх камень конечной массы на некоторую бесконечную высоту. Тогда, как бы вполне естественно считать мерой энергии растяжения пружины именно эту высоту, т.к. обе они обеспечены одной и той же константой энергетических возможностей этого условного гиганта.

Табл.2.

С т у п е н и о б о б щ е н и я с л о ж е н и я				
	I	**II**	**III**	**IV**
Качественно новые числовые противоположности	**Отрицательные-положительные**	**Целые-дробные**	**Рациональные-Иррациональные** **Действительные-мнимые**	**?…**
Трансфинитная мера различия	$\aleph_0$	$\aleph_1$	$\aleph_2$	$\aleph_{\omega+1} \div \aleph_{\omega^2}$
Примеры качественных различий	**Геометрические объекты** Отрезки прямых линий, площади, векторы, вращения. **Физич. величины** Практически любые физические величины -скорости, заряды, массы. **Стоимостное выражение:** наличность/ долг.	**Часть и целое** любой системы, любого единого образования.	**Геом. объекты:** отрезки ортогональных прямых линий, ортогональные векторы, несоизмеримые отрезки. **Качественные различия между**: точка/ отрезок, квадрат/куб, т.е. отношения между объектами разной пространственной размерности.	**?…**

О финитных и трансфинитных различиях вещей

О происхождении финитных чисел в объективной интерпретации. Трансфинитное изменение геометрической конфигурации

Прежде чем перейти к рассмотрению различных примеров качественных различий в свете понятия актуальной Бесконечности, следует еще раз остановиться более подробно на источниках происхождения финитных чисел, на приемах их получения применительно к сфере объективной реальности.

Первый способ получить конечное число – счет, а именно в нашем случае счет чего-либо реально существующего. Для этого нужно, чтобы объекты счета были различимы естественными органами чувств и обозримы в пространстве за конечное время проводимого счета. Т.е. они должны быть относительно друг друга конечны, равно как в целом их должно быть финитное количество, т.к. в противном случае их невозможно будет сосчитать из-за ограниченности фактора времени. Очевидно, что в результате, конечно же, будет получено финитное число. Таким способом, в условиях ограниченности человеческих возможностей, прежде всего касающихся ограниченности скорости счета, за время также ограниченной человеческой жизни, могут быть получены не очень большие по модулю целые числа в пределах не более 10^{10}.

Второй способ получения финитного числа, непосредственно привязанного к объективному миру – это измерение. Измерение представляет собой количественно выраженное сравнение между собой двух объектов **одинакового** качества. В процедуре измерения выясняется, во сколько раз один объект или какая-то его величина, больше другого объекта или его величины. В результате, получается тоже финитное число. Оно позволяет сказать, что некая величина **К** может быть выражена через другую величину **к** того же качества (называемую его мерой), с помощью финитного числа f:

$$\mathbf{К} = f \cdot \mathbf{к}\ .$$

Здесь нужно заметить, что для проведения измерений человечество создало огромное количество измерительных приборов и высокоскоростных счетчиков результатов измерительных процедур. Все они значительно превосходят человеческие сенсорные возможности как в отношении объемов информации, микро и макро размеров внешне воспринимаемых объектов реальной действительности (позволяя видеть даже невидимое к тому же с гораздо более высокой разрешающей способностью), так и в отношении скорости проведения самих счетных или измерительных процедур. Однако и в этом случае в результате будет всякий раз получаться в результате опять-таки, хотя и гораздо большее, но финитное число. Ограничения остаются принципиально теми же: не беспредельность области наблюдения, ограниченность разрешения, ограниченность скорости счета. Плюс еще и принципиально неустранимая ограниченность, связанная с волновой природой материи (соотношение неопределенностей Гейзенберга), сильно препятствующая введению как можно более малой измерительной меры.

Используя различные технические средства можно, конечно же, проникнуть во вне или во внутрь исследуемых объектов гораздо дальше, и, измеряя их, достичь чисел, лежащих в гораздо более широком, чем в предыдущем случае диапазоне, т.е. в пределах от 10^{-32} до 10^{32}. Но подобного рода, надо признать, значительный рывок относительно возможностей человека, не вооруженного современной техникой, в отношении интерпретации актуальной бесконечности сути дела не меняет. Более того, и актуальную и потенциальную бесконечности для практических целей можно вполне моделировать таким очень большим, но конечным числом как $10^{10^{10^{10}}}$. Опять, таки повторяем, что и это не принципиально, т.к. суть бесконечности, как это первоначально виделось, состоит не в том, чтобы уничтожать границы очень большими и прямолинейными преобразованиями объекта. Ее конструктивно позитивная значимость видится в совершенно ином направлении, а именно в направлении создания и количественной оценки бесконечно разведенных полюсов **качественно различных противоположностей**.

В итоге можно сделать вывод, что качественно одинаковые объекты - это объекты соизмеримые финитно, и, если так можно выразится, могут быть преобразованы друг в друга в результате изотропных финитных деформаций, как, например, в случае с коллинеарными векторами (см. табл.2).

Иначе говоря, финитное различие - это на самом деле есть по существу отсутствие различия, т.к. при финитном преобразовании происходит только смена масштаба рассмотрения явления. А потому, например, маленький круг или большой круг по существу - это все тот же круг, но в финитно измененном состоянии. То же самое можно сказать и о других объектах, претерпевающих подобного рода преобразования (см. табл. 3).

Итак, соприкасаясь с реальностью, человек получает финитные числа в результате проведения двух процедур: или в результате счета различимых объектов или в результате *соизмерения друг с другом качественно одинаковых объектов*. Вариантов не так уж и много, но, как говориться, третьего не дано. Причем точно получить финитное число можно только в процедуре счета (при этом оно окажется натуральным числом), а вот в процедуре измерения этого сделать невозможно из-за принципиально неустранимых погрешностей измерительных приборов, а самое главное из-за невозможности *точно* установить границы измеряемого объекта.

Во второй технологии получения финитного числа, связанной с соизмерением, содержится подсказка к содержательной интерпретации актуальной бесконечности. Пусть производится преобразование подобия маленького квадрата **k** в большой квадрат **K** с коэффициентном увеличения f. Что формально запишем как - **K =** f **k,** а натурально, в виде:

$$\square = f * \square \quad .$$

Если коэффициент подобия f увеличить до бесконечности (при этом f→ ∞), то образ

Финитные изменения некоторых геометрических и физических объектов. Табл.3

Качество объекта	*Мера данного качества*	*Другие финитные состояния данного качества*	*Алгебраическая запись финитных преобразований*
Отрезки прямой	Единичный отрезок l_0	l_2 l_1 l_3	$l_1 = f_1^* \cdot l_0$ ………… $l_3 = f_2 \cdot l_0$
Векторы одного направления	Единичный вектор того же направления $\bar{k}$	$\bar{a}$ $\bar{b}$ $\bar{c}$	$\bar{a} = f_1 \cdot \bar{k}$ $\bar{b} = f_2 \cdot \bar{k}$ $\bar{c} = f_3 \cdot \bar{k}$
Окружности	Единичная окружность G_0 $r_0 = 1$	G_3 G_1 G_2 r_2 r_1 r_3	$G_1 = f_1 \cdot G_0$ $G_2 = f_2 \cdot G_0$ . . .
Квадраты	Единичный квадрат k_0	k_1 k_2 k_3	$k_1 = f_1 \cdot k_0$ $k_2 = f_2 \cdot k_0$ . .
Массы	Единичная масса m_0	m_1 m_2 m_3	$m_1 = f_1 \cdot m_0$ . . .

f_1 ,f_2 .....- конечные (финитные) числа

квадрата изменится, и в зависимости от того, где выбран центр для проведения преобразования подобия, либо совсем исчезнет, либо будет представлять собой (при условии реального наблюдения) разной ориентации четверть плоскости (рис.4а), либо полуплоскости также в разной ориентации (рис.4б). Это означает, что квадрат конечных размеров и бесконечно большой квадрат воспринимаются нами в финитной области как качественно различные объекты. Попутно отметим, что в конечной области наблюдения, которой, как говорят, физически располагает человек, четверть бесконечной плоскости, полуплоскость и квадрат бесконечно больших размеров, тождественны, неразличимы. И, во-вторых, финитными преобразованиями эти объекты возвратить, т.е. преобразовать в исходный квадрат уже невозможно.

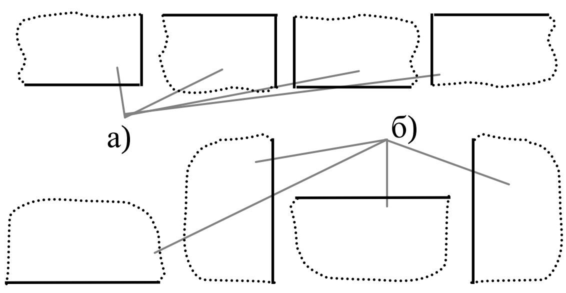


Рис.4. Видимые части бесконечно большого квадрата

Сходная ситуация с возникновением качественного скачка в конфигурации геометрического объекта происходит, если бесконечно изменять его не весь в целом, а только какую-то **часть** его границ. Например, в случае с треугольником и квадратом, как исходными геометрическими объектами для проведения трансфинитного преобразования, это будут выглядеть так, как показано на рис.5.

Таким образом, при бесконечной трансформации части границы геометрического объекта, качественно изменяется его форма. В наших случаях она и у треугольника и квадрата превращается в бесконечную ленту. Отсюда нашей интуитивно становится ясно, что

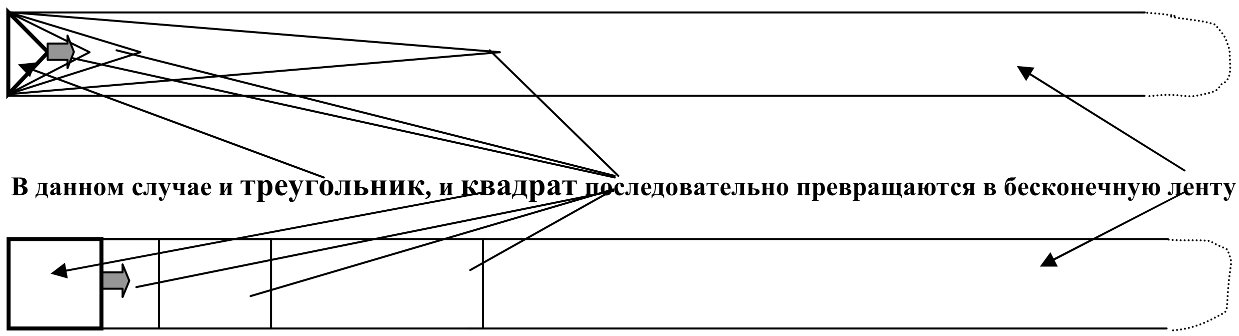


Рис.5. Последовательное растяжение треугольника и квадрата в бесконечную ленту.

геометрические образы, геометрические формы различных физических тел могут быть отличными друг от друга, принадлежа к одному внутривидовому типу, финитно, так и, выходя за рамки одинаковых внутривидовых групп, отличаться качественно, т.е. трансфинитно.

Самое удивительное, что именно геометрическая форма, как некая самостоятельная сущность, может быть таким приемом преобразована в качественно другой облик **за конечное время**! Как известно с понятием формы тела однозначно связана кривизна и соответственно радиус кривизны R. Наиболее показательным в этом отношении является пример преобразования

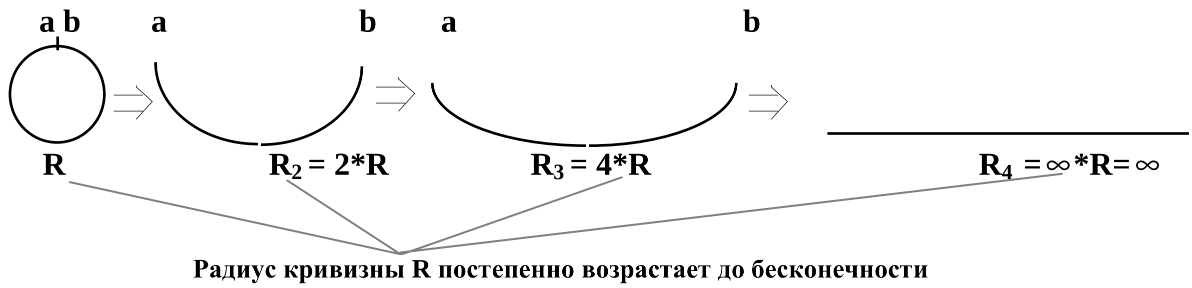


Рис. 6. Фазы преобразования окружности в отрезок за счет увеличения радиуса кривизны

окружности в отрезок, когда именно радиус кривизны от финитного начального значения R, постепенно увеличиваясь, у самого отрезка (рис. 5), как части прямой линии, становится бесконечным. Здесь важно отметить, что подобное преобразование геометрической формы вполне на практике реализуется за конечное время.

Окружность и квадрат тоже возможно преобразовать друг в друга, и при этом по какому - либо геометрическому параметру также произойдет тот же самый *бесконечный* скачок. Фазы перехода окружности в квадрат показаны на рис. 7.

В этом случае дуга “ab” как часть *окружности* преобразуется в отрезок “ab” в одну из сторон *квадрата* (они имеют бесконечно различные радиусы кривизны).

В объективном (физическом) смысле колеса и рычаги являются качественно различными объектами, и поэтому имеют качественно, т.е. трансфинитно различные свойства.

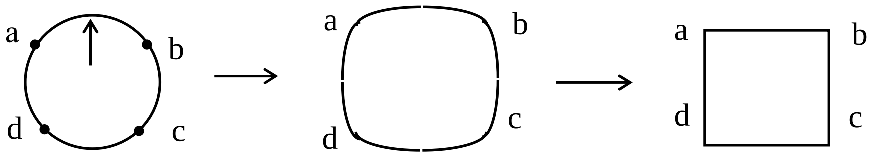


Рис. 7. Фазы преобразования окружности в квадрат.

Примеры бесконечных качественных различий

Известные в трансфинитном отношении качественные различия. Качественные преобразования конфигурации и конформные преобразования. О бесконечности в структурах движения

Известные в трансфинитном отношении качественные различия

Качественные различия мощности $\aleph_0$

Начнем с *минимальной величины качественных различий мощности* $\aleph_0$. Именно эту трансфинитную меру предлагается приписывать противоположностям «положительное/отрицательное», так как они рождаются от одного источника – действия сложения, как уже говорилось выше. Качественность и вместе с тем трансфинитность различий между положительным и отрицательным, следует из того, что *положительное* не может быть переведено в *отрицательное* финитным преобразованием. Это следует, так сказать, из определения качественных различий.

С другой стороны, интуиция подсказывает, что это действительно так и есть, так как именно бесконечная разница заключается в том - летит ли пуля на вас или от вас, иметь долг или иметь наличность, наблюдать поведение электрона или позитрона. Интуитивно ясная полярность свойств +/– была быстро освоена в физике, и на сущность этой разницы уже никто не обращает внимание. Главное, что это полезная абстракция. Их в настоящее время огромное количество в самых разных отраслях современного знания. Достаточно вспомнить, что подобными +/– свойствами кроме скалярных, наделены все векторные и тензорные физические величины.

Качественные различия мощности $\aleph_1$

Следующей бесконечной мощностью качественного скачка является мощность континуума $\aleph_1$. Такое предопределение, диктуется тем, что само действие деления, своему смыслу и свойствам, является выразителем идей анализа и синтеза, соединения и разъединения, деления целого на части и воссоздания, синтеза целого из частей. В этих идеях, по общему признанию всех известных философских, систем содержится, по-видимому, указание на фундаментальный закон Вселенной, касающийся всех известных сфер реальности.

Совершенно очевидно и здравому смыслу и интуиции, что цельная ваза и разбитая вдребезги – это **качественно** разные вещи. Отрицательный эффект проявления обсуждаемого качественного скачка хорошо подмечен в общеизвестном принципе – разъединяй и властвуй, - т.к. разъединение некоего целого на части подобно разбитию вазы имеет качественный эффект изменения свойств системы или объекта в сторону в данном случае ослабления. Еще более сильным, в этом отношении примером, является известный факт разъединения, известный под названием биологическая смерть, в результате которой происходит глубочайшее разрушение всего организма живого существа, распад его на части до такой степени, что жизнь в этих частях оказывается уже невозможной.

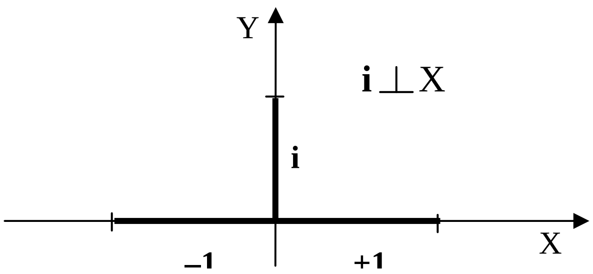


Рис. 8. Ортогональность мнимой единицы **i** оси X

(Особое значение имеет соединение в единое целое диалектических противоположностей, полярных по своему

смыслу. Однако на этом уровне обсуждения проблемы возникают следующие, требующие своего разрешения вопросы:

1. Как выглядит функция зависимости трансфинодов качественных скачков в зависимости от количества уровней иерархии n агрегатирования различных элементов в единое целое?

2. **Зависит ли трансфинод качественного скачка от количества и порядка агрегатирования исходных элементов в целое?)**

Качественные различия мощности $\aleph_2$

Переходим к обсуждению качественных различий, порождаемых обратными действиями третьей ступени – логарифма и корня. Мощность качественных различий этого уровня следует приравнивать по величине, равной $\aleph_2$. К первому типу качественнх различий этой мощности следует отнести качественную разницу двух геометрических объектов несоизмеримых за бесконечное число шагов (здесь имеется ввиду счетная бесконечность). К ним относится различие между рациональным и иррациональным. В частности к таковой разнице следует отнести качественное различие между стороной и гипотенузой квадрата: T(1 r $\sqrt{2}$)= $\aleph_2$. Эта идея имеет подтверждение в факте формальной записи действительного числа в виде бесконечной *непериодической* дроби (в отличие от рационального числа m/n, которое есть бесконечная *периодическая* дробь). Точно также несоизмеримыми оказываются длина окружности и ее диаметр. Этот факт бесконечной несоизмеримости произвел в свое время на древних греков, впервые обнаруживших его, огромное, почти мистическое впечатление. Несколько проще воспринимается вторая идея качественного скачка мощности $\aleph_2$, и состоящая в том, что качественно различными именно в такой трансфинитной степени следует признать объекты, имеющие разное число пространственных измерений. Это связано с тем, что извлечение корня квадратного из произведения положительной и отрицательной единиц $\sqrt{(+1)(-1)}$ = **i**, есть мнимая единица, которая в геометрической интерпретации, лежит по отношения к первым двум в ином измерении (рис. 8). Отсюда также следует, что точка, отрезок, квадрат, куб, как представители нуль-мерности, двухмерности и трехмерности, соответственно, отличны в трансфинитном отношении друг от друга на величину $\aleph_2$. Отсюда, конечно же, возникает вопрос о сравнении в трансфинитно-качественном отношении объектов, имеющих разное количество измерений. Иначе говоря, если два объекта имеют в себе соответственно n и m измерений, то, как в этом случае следует вычислять трансфинитную разницу между ними в зависимости от уже известной разницы в количестве измерений (n-m)?

Качественные преобразования конфигурации и конформные преобразования

Наглядное представление о возможностях качественных преобразований форм геометрических объектов, которые заложены в обычных арифметических действиях различных ступеней, можно получить на примерах конформных преобразований [31]. Посмотрим, какими свойствами, в этом отношении обладают прямые и обратные действия первых трех ступеней. Для этого используем обычную комплексную плоскость и различные геометрические образы,

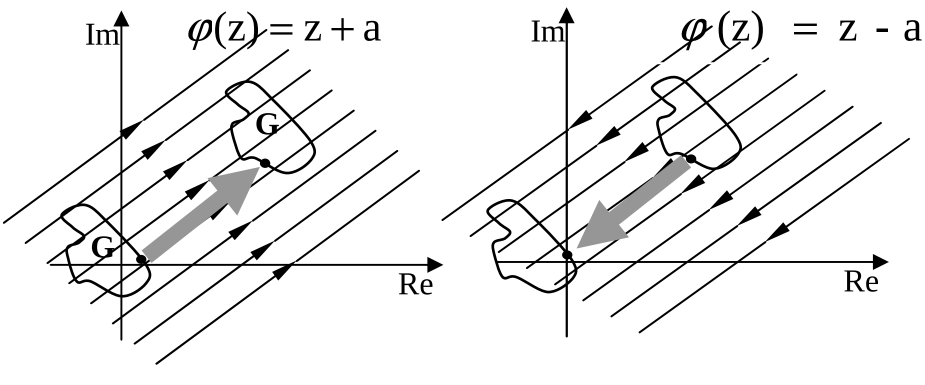


Рис.9 Сложение и вычитание дают прямую и обратную трансляцию (перенос) образа G

которые можно разместить на плоскости. Из рис. 9 видно, что прямое и обратное действие первой ступени на комплексной плоскости равносильно прямой и обратной трансляции геометрического образа G в той же плоскости без изменения его формы. Сложение и вычитание, таким образом, в геометрической интерпретации представляют собой в этом случае обычный параллельный перенос.

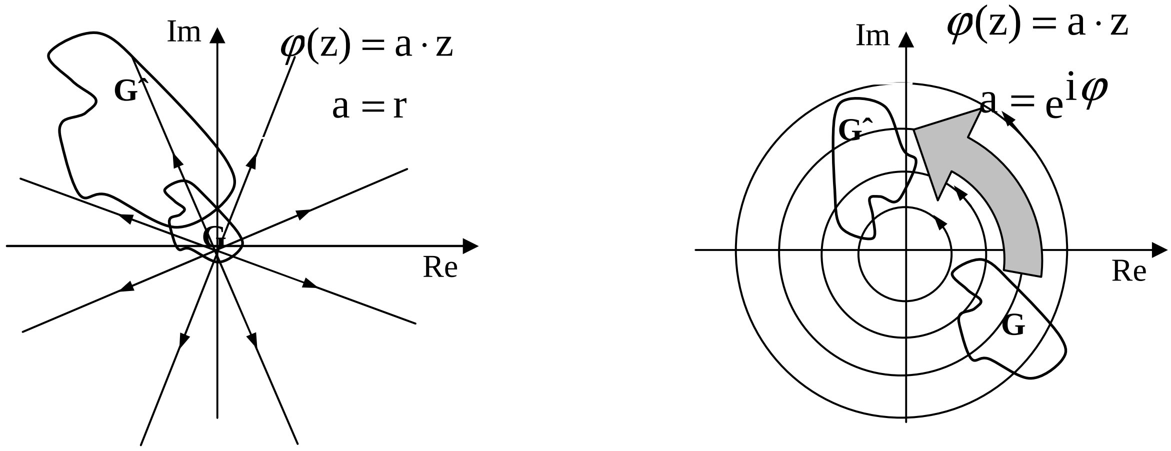


Рис.10. Умножение как преобразование подобия (*а* – действительное число) и поворота (*а* – мнимое число) образа G в зависимости от параметра *а*

При выполнении конформного преобразования прямым действием второй ступени – умножением – в случае, когда множитель *а* перед Z в функции φ (z) = *a*·Z является

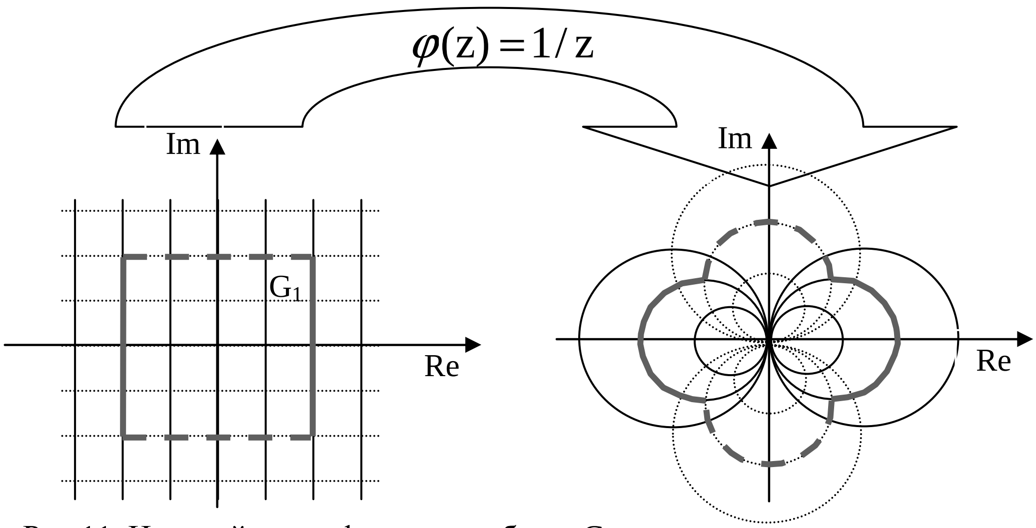
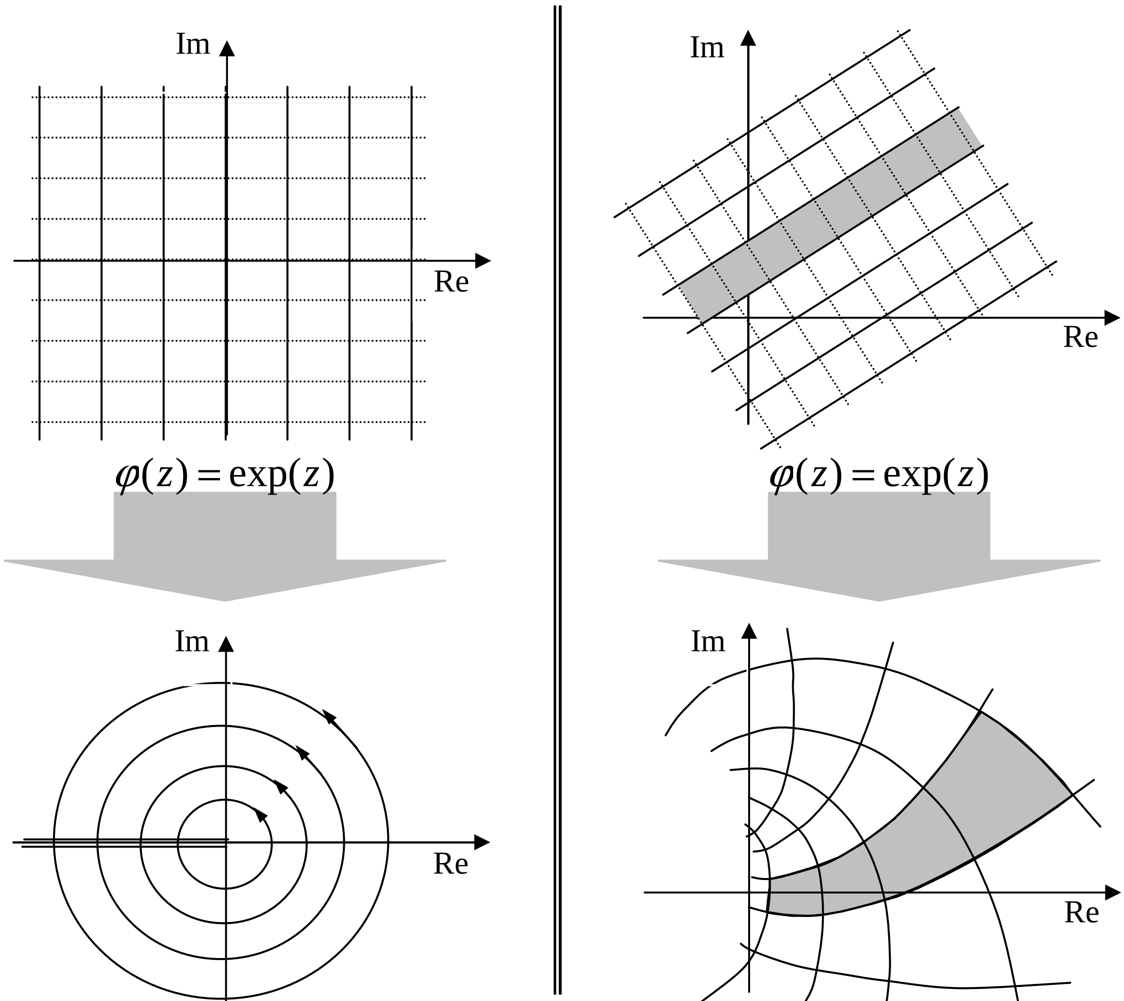


Рис.11. Нелинейные деформации образа G_1 в результате проведения деления – обратного действия второй ступени.

действительным числом происходит преобразование подобия образа G , т.е. осуществляется линейная и изотропная его деформация из центра в нашем случае в начале координат. Если же множитель *а* является чисто мнимым числом, то происходит поворот образа



а) **Исходный прообраз – сетка, - ортогональна осям координат**

б) **Исходный прообраз – сетка, - наклонена к осям координат**

Рис. 12. Нелинейные деформации прямоугольной сетки с разной ориентацией исходного прообраза к осям координат - а) и б) в результате отображения прямым действием третьей ступени (экспонентой).

в пространстве (см. рис. 10). Если же число *a* окажется комплексным, то преобразование образа G будет представлять собой композицию преобразований поворота и растяжения.

Выполнение конформного преобразования обратным действием второй ступени – делением с помощью функции $\varphi(z) = 1/Z$ представляет собой уже иную, в сравнении с первым, так сказать линейным случаем, разновидность деформации образа, когда прямые линии параллельные осям координат преобразуются в дуги окружности (см. рис. 11). Деформация образа становится нелинейной. А в случае использования прямого действия третьей ступени, и именно экспонентой нелинейной (см. рис. 12.) трансформация образа становится сугубо нелинейной.

Все эти примеры – наглядная иллюстрация качественных изменений в специфике преобразования образа в зависимости от использования различных прямых или обратных действий произвольной ступени. Они показывают, что наращивание ступеней действий, используемых в этих преобразованиях, усложняет структуру пространственных деформаций исходной геометрической формы в отношении нарастания в них качественной сложности.

О проявлении качественных различий в структурах движения

Как известно, наибольшее количество информации человек получает по двум сенсорным каналам – зрительному и слуховому. Простейшее соприкосновение с областью любых видов вибраций обнаруживает наличие в них, также как и в пространственных объектах, своеобразной структурности, сложенности, составленности. Наиболее простой случай, иллюстрирующий наличие структуры в вибрациях, представляет собой колебание одномерной струны (например, той же гитары). Это сложное колебание в первом приближении представляет из себя сумму некоторого финитного количества гармонических колебаний $A_i Sin(2\pi f_i+\varphi_i)$ в виде:

$$G(t)= \Sigma\ A_i\ Sin(2\pi f_i+\varphi_i).$$

Такого рода представление называется спектральным разложением функции G(t) (см. рис. 13.) в ряд Фурье.

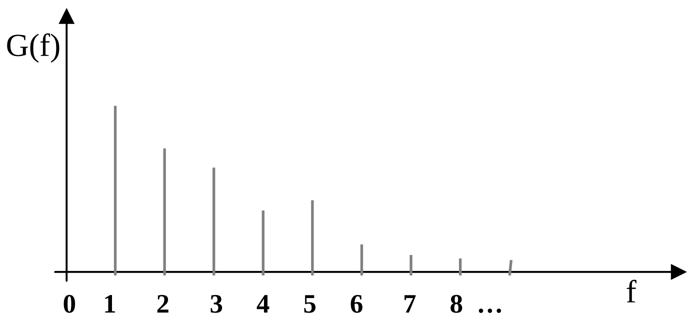


Рис.13. Спектр Фурье как аддитивный образ функции

Что будут собой пред-ставлять простейшие ансамбли вибраций, составленные из гармонических функций при компоновке в целое, например, с помощью различных прямых действий: сложения, умножения, возведения в степень и в сверхстепень. Возможно ли осуществление таких моделей в действительности? Рассмотрим это на примере синтеза двух ограниченных спектров Фурье: $G_1(t) = \Sigma\ A_i\ Sin(2\pi f_i+\varphi_i)$ и $G_2(t) = \Sigma\ B_j\ Sin(2\pi f_j+\varphi_j)$.

Как будут выглядеть их сумма $G_3(t) = G_1(t) + G_2(t)$, произведение $G_4(t) = G_1(t) * G_2(t)$ и степень $G_5(t) = G_1(t)^{G_2(t)}$?

Результаты такого синтеза представлены на рис.14. В случае первом, показанном на рис.14А, это будет не что иное, как простое в частотном отношении объединение этих исходных спектров, один из которых находится в низкочастотной, а другой в высокочастотной областях частотной шкалы.

Во втором более сложном случае $G_4(t) = G_1(t) * G_2(t)$, который представляет собой пример мультипликативного агрегатирования в динамическое целое, - это будет некоей разновидностью амплитудной модуляции спектра $G_2(t)$, спектром $G_1(t)$. При этом, как это видно на рис. 14Б, происходит уплотнение исходного спектра, - каждый обертон спектра (т.е. каждая частотная составляющая) приобретает суммарные и разностные компоненты.

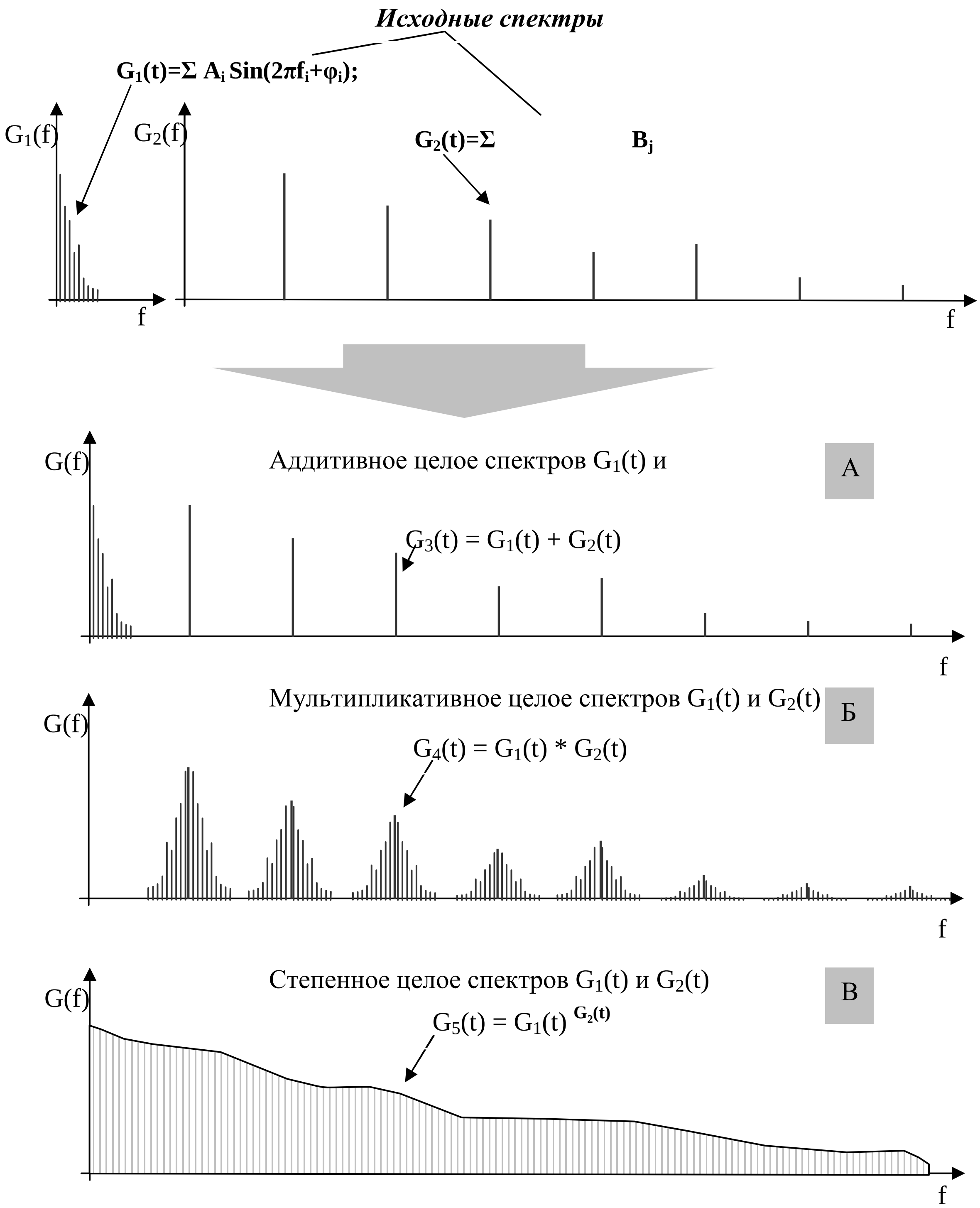


Рис.14. Агрегатирование исходных спектров в единую динамическую структуру с помощью действий первых трех

В третьем случае происходит степенное агрегатирование исходных спектров $G_5(t) = G_1(t)^{G_2(t)}$. Цельный динамический образ в этом случае будет являть собой сложную картину амплитудно-частотной модуляции (см. рис.14В). Спектр Фурье такого агрегата становится сплошным. Все эти три случая показывают, что результаты синтеза с использованием действий первых трех ступеней и внешне, по характеру итогового спектра и в субъективном восприятии, т.е. при прослушивании, производят совершенно разное впечатление, а именно впечатление качественного различия.

Наконец весьма показательным примером качественного изменения структуры вибрации является преобразование частотной структуры мажорного аккорда в минорный. Так называемый мажорный аккорд состоит из трех доминирующих частот $f_1=4*f_0$, $f_2=5*f_0$, $f_3=6*f_0$ (при значении частоты $f_0=271/4$ Гц этот ансамбль будет представлять собой до мажорный аккорд первой октавы). Это трезвучие названо мажорным вследствие того, при прослушивании создает впечатление торжественного радостного звучания. Преобразуя эту частотную структуру с помощью обратного действия второй ступени вида $F_m=1/F_d$ (см. рис. 15) мы получим ансамбль частот следующего вида:

$$f_1=1/4*g_0,\ f_2=1/5*g_0\ ,\ f_3=1/6*g_0.$$

(при значении частоты $g_0=271*6$ Гц этот ансамбль будет представлять собой соответственно до минорный аккорд первой октавы). Это трезвучие названо минорным вследствие того, при прослушивании создает впечатление напротив меланхолически-грустное и иногда даже трагически тягостное.

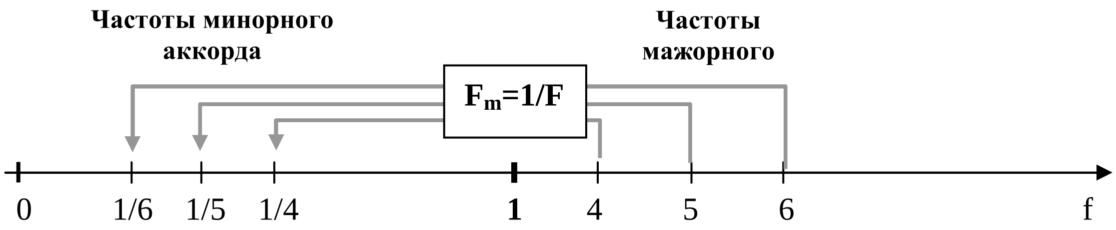


Рис. 15. Трансформация мажорного аккорда в минорный обратным действием второй ступени – делением.

Заключение
Выводы, проблемы, перспективы

1. Следует различать два типа взаимоотношений между вещами. **Первый тип** – финитный. Он характерен для внутривидовых отношений вещей одного качества. Этот тип отношений в мире конечных вещей выражает идею соразмерности и продуцируется из сферы объективной реальности в результате проведения хорошо всем известной технологии измерения. **Второй тип** отношений – трансфинитный. Он характерен для вещей, находящихся в качественно различных состояниях.

2. Процедура измерения качественных различий с использованием трансфинитных чисел еще не разработана в полном объеме. Однако построение математической теории качественных скачков с использованием трансфинитной алгебры, приближающей ее к более или менее приемлемому виду для практического использования в естественных науках – реально, но требует дальнейшей более углубленной проработки. Результативным оно явится, как нам представляется, делом не столь отдаленного будущего.

3. Различные формы жизни, качественные состояния множества вещей, геометрические формы физических объектов и многое другое по интуитивно ясным предпосылкам могут быть относительно друг друга упорядочены по критерию сложности их сущностей, а с привлечением шкал финитных и трансфинитных чисел это задача из сферы интуиции переходит в сферу математики, в сферу точных наук.

4. Наличие качественной определенности в смысловой структуре числа, появляющейся на определенной ступени его развития, является основой для установления соответствия между качеством и трансфинитным числом. Это соответствие – основа для создания математической теории качественных скачков.

Создание математической теории качественных скачков с применением понятия актуальной бесконечности в перспективе должно явиться серьезной инициацией для выхода из идеологического кризиса современной науки. Оно, на наш взгляд, способно вывести современное естествознание на качественно более высокий уровень. Однако реализация такого намерения потребует проведения огромной творческой работы. Как нам представляется, идеологически она должна основываться более всего на решении задач, связанных с математическим описанием многоликих воплощений Бесконечности применительно, прежде всего, к сфере конечных выразительных форм объективной реальности.

Литература

1. Аристотель Сочинения в 4-х томах, М., 1976
2. Арнольд В.И. Теоретическая арифметика. -М.: Учпедгиз, 1939.
3. Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты М., «Янус-К», 1997.
4. Бесконечность и вселенная. -М.: Мысль, 1969.
5. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. -М.: Мир, 1989.
6. Богомолов С.А. Актуальная бесконечность. -СПб.: 1923, Л.М., 1934.
7. Больцано Б. Парадоксы бесконечного. –Одесса: 1911.
8. Бугаев Н.В. Введение в теорию чисел. -М.: 1865.
9. Бугаев Н.В. (1837-1903) ИМИ-29 Историко-математические исследования, 1985.
10. Бугаев Н.В. Основы эволюционной монадологии. -М.: 1893.
11. Бунин В.А. Сверхстепень как новое математическое действие для описания быстропеременных физических процессов В сб. МОИП «Математическая физика. Электродинамика. История физики» -М.: 1967.
12. Бунин В.А., Чудинов В.А. Об использовании в задачах прикладной электродинамики чисел новой природы. В сб. МОИП «Новые вопросы электродинамики» М.: 1976.
13. Бурбаки Н. Теория множеств. -М.: 1965.
14. Бургин М.С. Подходы к понятию актуальной бесконечности в математике –Сб. «Бесконечность в математике: философские и математические аспекты» –М.,«Янус-К», 1997.
15. Виноградов И.М. Основы теория чисел. -М.: 1976.
16. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств –М., Наука, 1983.
17. Гильберт Д. Основания геометрии. – М., 1948.
18. Гордон Е.И., Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Инфинитезимальный анализ, ч.1 –Новосибирск, изд. ИМ СО РАН, 2001.
19. Граве Д. Энциклопедия математики. –Киев: 1912.
20. Зенкин А.А. Ошибка Георга Кантора –Вопросы философии, 2000, №2.
21. Жегалкин И.И. Трансфинитные числа. -М.: Университет, 1907.
22. Кантор Г. Труды по теории множеств. -М.: Наука, 1985.
23. Кантор И.А., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. -М.: Наука, 1973.
24. Катасонов В.Н. Боровшийся с бесконечным –М., МАРТИС, 1999.
25. Крушинский А.А. О круговом понимании бесконечности древними китайцами –В сб. «Бесконечность в математике: философские и математические аспекты.» –М., «Янус -К», 1997.
26. Клайн М. Математика, поиск истины. -М.: Мир, 1988.
27. Колокольчиков В.В. Отображения от чисел до функционалов УРСС М., 1999.
28. Кузанский Н. Сочинения в 2-х томах –М., Мысль, 1979.
29. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. -М.-Л.: 1937.
30. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум гипотеза. -М.: Мир, 1969.
31. Лаврик В.И., Савенков В.Н. Справочник по конформным отображениям – Киев, «Наукова думка», 1970.
32. Лосев А.Ф. Миф-Число-Сущность. -М., Мысль, 1994.
33. Лосев А.Ф. Бытие-Имя-Космос. -М., Мысль, 1998.
34. Лосев А.Ф. Очерки античного символизма и мифологии. -М.: Мысль, 1998.
35. Лосев А.Ф. Структура и Хаос. -М.: Мысль, 1998.
36. Музыка и математика (под ред. Г. фон Караяна). -М.: Наука. 1994.

37. Наан Г. К проблеме бесконечности - «Вопросы философии», 1965, №12.
38. Шрамко Я. Ошибка Георга Кантора? –Вопросы философии, 2001, №9.
39. Шестаков В.П. Гармония как эстетическая категория. -М.: 1983.
40. Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. -М.: 1966.
41. Хаусдорф Ф. Теория множеств -М.-Л.: 1937.
42. Hodges W. An editor recalls some hopeless papers –The Bulletin of symbolic Logic., V.4, 1998.
43. Pensees // Pensees de Pascal et de Nicole. Paris, 1852.