А.П. Стахов

Конструктивная (алгоритмическая) теория измерения, системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии

Алгебру и Геометрию постигла одна и та же участь. За быстрыми успехами в начале следовали весьма медленные и оставили науку на такой ступени, где она еще далека от совершенства. Это произошло, вероятно, от того, что Математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою.

Николай Лобачевский

Часть 6. Системы счисления с иррациональными основаниями как основа «золотой» теории чисел

Если рассмотреть историю математики с момента ее зарождения, то, согласно А.Н. Колмогорову, ее развитие стимулировалось практическими потребностями в ***счете****, что привело к открытию позиционного принципа представления чисел (Вавилонская 60-ричная система счисления) и «созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел» (А.Н. Колмогоров), и в* ***измерении,*** *что вызвало «развитие начатков геометрии» (А.Н. Колмогоров) и привело к открытию «несоизмеримых отрезков». Однако, согласно* ***«гипотезе Прокла»****, создание древнегреческой математики, которая лежит в основе современной математики, осуществлялось под мощным влиянием* ***«идеи гармонии»*** *- главной идеи древнегреческой науки. Наиболее ярко это влияние отразилось в «Началах» Евклида, главной целью которых стало создание завершенной геометрической теории* ***Платоновых тел****, выражавших в древнегреческой науке «гармонию Мироздания». В настоящей статье обсуждаются три новые математические теории, которые возникли в современной науке в развитие трех фундаментальных проблем, лежащих в основании математики - счета, измерения и гармонии:* ***алгоритмическая теория измерения****,* ***системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии****. В основе алгоритмической теории измерения (АТИ) лежит абстракция потенциальной бесконечности, то есть, она является* ***конструктивной математической теорией измерения*** *(без аксиомы Кантора). Предметом исследований в АТИ являются оптимальные, то есть, наилучшие в определенном смысле алгоритмы измерения. Основным математическим результатом АТИ является синтез новых, неизвестных ранее алгоритмов измерения, которые порождают новые, неизвестные ранее позиционные системы счисления. Наиболее неожиданными результатами АТИ являются так называемые* ***биномиальные алгоритмы измерения****, основанные на «арифметическом квадрате» (треугольнике Паскаля), и* ***фибоначчиевые алгоритмы измерения,*** *которые привели к открытию новых числовых последовательностей, названных* ***p-числами Фибоначчи****. Фибоначчиевы алгоритмы измерения лежат в основе* ***p-кодов Фибоначчи*** *– новых способов позиционного представления натуральных чисел, которые являются обобщением классической двоичной системы. Эти позиционные представления были положены в основу нового направления в компьютерной науке –* ***компьютеров Фибоначчи*** *(65 патентов США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канады и др. стран).* ***Системы счисления с иррациональными основаниями (коды золотой p-пропорции)*** *являются новыми способами позиционного представления действительных чисел. Они переворачивают наши традиционные представления о системах счисления и могут быть положены в основу* ***«золотой» теории чисел.*** *Наконец,* ***«математика гармонии»,*** *включающая в себя АТИ и коды золотой* *пропорции, является новым междисциплинарным направлением современной науки, которое может быть положено в основу новой математики, лишенной противоречий.*

Статья состоит из 8 частей:

1. *Роль измерения в развитии науки*
2. *Математическая теория измерения и проблема бесконечности*
3. *Математическая модель измерения. Оптимальные (n,k,0)-алгоритмы и классические позиционные системы счисления*
4. *Биномиальные алгоритмы измерения как источник биномиальных систем счисления*
5. *Задача Баше-Менделеева, принцип асимметрии измерения, фибоначчиевые алгоритмы измерения и р-коды Фибоначчи*
6. *Системы счисления с иррациональными основаниями как основа ««золотой» теории чисел*
7. *Математика гармонии: наиболее яркие страницы*
8. *Основные математические результаты, приложения и перспективы развития «математики гармонии»*

1. Немного истории

Создание *алгоритмической теории измерения* и введение *р-чисел Фибоначчи, золотых р-сечений, р-кодов Фибоначчи, теории компьютеров Фибоначчи* и, наконец, *кодов золотой р-пропорции, теории «золотых» резистивных делителей (аттенюаторов)* и основанных на них *«золотых» аналого-цифровых и цифроаналоговых преобразователей,* строго говоря, есть результат коллективного творчества. Эти исследования велись при моем активном участии и под моим научным руководством членами научных команд, которые создавались мною в трех высших учебных заведениях: Харьковском институте радиоэлектроники (1963-1971), Таганрогском радиотехническом институте (1971-1977) и Винницком политехническом институте (1977-1996). Эти исследования были начаты в Харьковском институте радиоэлектроники в 1963 г. (год моего поступления в аспирантуру). Членами моей команды стали талантливый математик **Игорь Витенько**, выпускник механико-математического факультета Львовского университета, и мой первый аспирант **Николай Алипов,** который позже защитил докторскую диссертацию по помехоустойчивым алгоритмам измерения. Именно с ними мною были выполнены исследования и написаны первые статьи по *теории оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования* [1,2], которая является прообразом *алгоритмической теории измерения* [3,4]. В 1970 г. Игорь Витенько переехал в Ужгород, где проработал доцентом кафедры математической логики Ужгородского университета вплоть до своей трагической гибели в 1974 г. (он покончил жизнь самоубийством).

В 1971 г. я был избран на должность зав. кафедрой информационно-измерительной техники Таганрогского радиотехнического института (ТРТИ). В ТРТИ я начал создавать новую научную команду, которая на начальном этапе состояла из студентов – моих будущих аспирантов. Таганрогский период моей жизни оказался весьма плодотворным для развития моего научного направления и отмечен рядом важных событий, которые сыграли большую роль в моей научной биографии.

В 1972 г. на специализированном ученом совете Киевского института инженеров гражданской авиации я защитил докторскую диссертацию на тему «Синтез оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования». Защищалась диссертация по специальности 05.252 "Вычислительная техника". Официальными оппонентами по диссертации выступили известные ученые: академик Академии наук Украины **Георгий Евгеньевич Пухов**, и доктора технических наук **Михаил Петрович Цапенко** (из Новосибирского электротехнического института) и **Феодосий Борисович Гриневич** из Института электродинамики Академии Наук Украины (впоследствии - академик Национальной Академии наук Украины). В качестве ведущего предприятия выступал Всесоюзный научно-исследовательский институт электроизмерительных приборов (г. Ленинград). В обсуждении диссертации выступил патриарх советской измерительной техники проф. **Петр Павлович Орнатский** (Киевский политехнический институт). В своем выступлении он отметил, что *«вчера в*

Москве происходило заседание научно-технического совета Министерства приборостроения, на котором обсуждался вопрос о создании агрегатированного комплекса информационно-измерительной техники. В качестве теоретических работ, которые являются основой для создания комплекса, называлась и настоящая работа».

Сразу после защиты докторской диссертации у меня возник вопрос: в каком направлении развивать *алгоритмическую теорию измерения*? Никто не отрицал оригинальности полученных мною результатов в области алгоритмов аналого-цифрового преобразования. Но когда дело доходило до практической реализации новых алгоритмов аналого-цифрового преобразования, предложенных в моей диссертационной работе, то возникал вопрос: кому нужны аналого-цифровые преобразователи, на выходе которых информация представляется в форме, недоступной для восприятия современными «двоичными» компьютерами? Именно этот естественный вопрос и стал побудительной причиной для разработки машинной арифметики в новых кодах. Раз современные компьютеры не воспринимают информацию в новых кодах, то компьютерную технику просто надо переделать, то есть, создать компьютеры, выполняющие операции в новых кодах. **Таков был мой «вызов» компьютерной технике, поставленный мною сразу после защиты докторской диссертации в 1972 году.**

Началом реализации «грандиозной», как мне тогда казалось, программы по исследованию новых компьютерных арифметик, вытекающих из «алгоритмической теории измерения», стали p-коды Фибоначчи, которые вытекали из фибоначчиевых алгоритмов измерения и представляли собой следующие позиционные способы представления натуральных чисел:

$$N = a_nF_p(n) + a_{n-1}F_p(n-1) + \ldots + a_iF_p(i) + \ldots + a_1F_p(1). \qquad (1)$$

где $a_i \in \{0,1\}$ – двоичная цифра i-го разряда позиционного представления (1); n – число двоичных разрядов позиционного представления (1); $F_p(i)$ – вес i-го разряда, представляющий собой ни что иное, как p-число Фибоначчи, задаваемое рекуррентным соотношением:

$$F_p(n) = F_p(n-1)+F_p(n-p-1) \quad \text{для} \quad n>p+1 \qquad (2)$$

$$F_p(1) = F_p(2) = \ldots = F_p(p+1) = 1. \qquad (3)$$

Но для этого необходимо было разработать «арифметику Фибоначчи», основанную на кодах Фибоначчи (1). И такая арифметика была мною разработана летом 1974 г. Первая статья по «арифметике Фибоначчи» была опубликована в 1974 г. в научном сборнике ТРТИ [5]. В 1975 г. статьи на эту тему были опубликованы в известных всесоюзных журналах и сборниках [6,7].

Таким образом, в середине 70-х годов мой «научный багаж» уже включал в себя ряд серьезных математических результатов – *алгоритмическую теорию измерения, p-коды Фибоначчи* и *арифметику Фибоначчи.* И я готов был представить эти результаты на каком-либо солидном научном форуме.

В 1976 году судьба подбросила мне «счастливый случай» - 2-месячную научную командировку в Австрию с целью научной стажировки в ведущих университетах Австрии. В тот период международная обстановка способствовала развитию научных связей между СССР и странами Западной Европы. В развитие решений Хельсинского совещания глав Европейских государств, между СССР и Австрией было заключено соглашение о научном сотрудничестве и обмене научными кадрами, прежде всего докторами наук и профессорами. Поэтому в Минвузе СССР возникла срочная необходимость найти доктора технических наук, профессора, который мог бы достойно представить советскую науку в Австрии. Обычно для таких "лакомых" командировок подыскивались профессора московских или ленинградских вузов. В данном случае особенность ситуации состояла в том, что требовался доктор наук в области вычислительной техники с хорошим знанием немецкого языка, который в то время (да и сейчас) был не очень популярен среди столичных компьютерных докторов наук. Поэтому мое неплохое (на тот период) знание немецкого языка и сыграло определяющую роль в выборе моей кандидатуры для поездки в Австрию.

В Австрии я пробыл 2 месяца (январь-март 1976 г.). Местом моей стажировки был Венский технический университет (Институт обработки информации). Кроме того, я посетил Инсбрукский и Грацкий университеты. На заключительной стадии стажировки я выступил с обширным докладом **«Алгоритмическая теория измерения и основания компьютерной арифметики»** на объединенном заседании Кибернетического и Компьютерного обществ Австрии (Вена, 3 марта 1976 г.). В связи с весьма высокой оценкой доклада ведущими учеными Австрии в области кибернетики и информатики посол СССР в Австрии **Иван Ефремов** направил письмо в Государственный Комитет СССР по науке и технике, в котором поставил вопрос о патентовании изобретений в области «Компьютеров Фибоначчи» за рубежом. Решение о патентовании было принято Госкомизобретений СССР без каких-либо усилий с моей стороны. В мае 1976 г. ко мне в Таганрог приехал эксперт Госкомизобретений и привез мне решение Госкомизобретений о патентовании.

В ТРТИ я продолжил подготовку научных кадров. Наиболее яркими диссертациями, защищенными в ТРТИ под моим научным руководством, были кандидатские диссертации **Валентина Галалу** (фибоначчиевые АЦП и ЦАП) и **Юрия Вишнякова** (счетчики Фибоначчи). Это были первые в мировой науке диссертации по применению кодов Фибоначчи в измерительной и компьютерной технике. Юрий Вишняков стал моим вторым учеником, защитившим позже докторскую диссертацию.

Еще одним важным событием моего «таганрогского периода» стала публикация моей первой книги **«Введение в алгоритмическую теорию измерения»** (1977) [3]. В этой книге были изложены основы алгоритмической теории измерения и арифметики Фибоначчи.

В 1977 г. я был избран на должность зав. кафедрой вычислительной техники Винницкого политехнического института (ВПИ), в котором проработал около 20 лет – вплоть до моих африканских путешествий (Университет Аль Фатех, Триполи, Ливия, 1995-1997 и Университет Эдуардо Мондлано, Мапуто, Мозамбик, 1998-2000).

Вместе со мной в Винницу переехала группа аспирантов (**Алексей Азаров, Владимир Лужецкий, Николай Соляниченко**). Эти аспиранты и стали костяком нового научного коллектива, который я начал создавать в ВПИ. В ВПИ под моим научным руководством было защищено около 20 кандидатских диссертаций, а 2 моих ученика **Алексей Азаров** и **Владимир Лужецкий** защитили позже докторские диссертации. Поэтому можно даже говорить о «научной школе», созданной мною в ВПИ.

В начале моего «винницкого периода» издательство «Знание» опубликовало мою брошюру **«Алгоритмическая теория измерения»** в престижной серии «Математика и кибернетика» [4], что способствовало рекламе «алгоритмической теории измерения» [3].

И в начале «винницкого периода» был получен еще один важный математический результат – разработаны *коды золотой пропорции*. Первая статья по этим кодам опубликована в 1980 г. [8], а в 1984 г. издательство «Радио и связь» опубликовало мою книгу **«Коды золотой пропорции»** [9], посвященную изложению теории и приложений этих кодов в измерительной и компьютерной технике.

2. Коды золотой пропорции как новый способ позиционного представления действительных чисел

Большую роль в моей жизни сыграл всемирно известный математик академик Украинской и Российской академий наук **Юрий Алексеевич Митропольский**. Перед моим отъездом в Канаду он подготовил отзыв на мое научное направление на русском и английском языках. Русскоязычный вариант опубликован на сайте АТ [10]. С Юрием Алексеевичем мы регулярно встречались. Эти встречи в его кабинете в Институте математики НАНУ иногда продолжались в течение нескольких часов. В одну из таких встреч я рассказал Юрию Алексеевичу концепцию «золотой» арифметики. Идея ему понравилась и по его рекомендации в «Украинском математическом журнале» в 2004 г. была опубликована моя статья **«Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа»** [11]. Ниже конспективно излагается содержание одной из бесед с Юрием Алексеевичем Митропольским, касающейся кодов золотой пропорции, их необычных математических свойств и приложений.

2. Системы счисления с иррациональными основаниями

2.1. ***Евклидово определение натурального числа***

Если возвратиться к истокам *теории чисел*, которая берет свое начало в математике древних греков, то мы увидим, что она начинается со следующего определения натурального числа, основанного на геометрическом подходе и описанного в «Началах» Евклида.

Пусть

$$S = \{1, 1, 1, \ldots\} \tag{4}$$

представляет собой бесконечное множество геометрических отрезков, называемых «*монадами»* или *единицами.* Тогда согласно Евклиду натуральное число N определяется следующим образом:

$$N = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{N} \tag{5}$$

Несмотря на кажущуюся простоту такого определения, оно сыграло определяющую роль в развитии теории чисел и лежит в основе многих теоретико-числовых понятий, в частности, понятий *простого* и *составного* числа, *умножения, деления*, а также понятий *делимости* и *сравнения*, которые являются одними из основных понятий элементарной теории чисел, то есть, определение (5) «порождает» как натуральные числа, так и всю проблематику их теории.

2.2. ***Конструктивный подход к определению числа***

Известен также «конструктивный подход» к определению числа, согласно которому всякое «конструктивное» действительное число A является некоторым математическим объектом, задаваемым с помощью следующей математической формулы:

$$A = \sum_i a_i 2^i , \tag{6}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ и $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Определение числа, задаваемое (6), имеет следующую геометрическую интерпретацию. Пусть

$$B = \left\{2^i, i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\right\} \tag{7}$$

множество геометрических отрезков длины 2^i. Тогда «конструктивными» действительными числами называются все геометрические отрезки, которые могут быть представлены в виде конечной суммы геометрических отрезков из (7) в виде (6).

Ясно, что определение (6) выделяет из множества действительных чисел только некоторую часть чисел, которые могут быть представлены в виде суммы (6). Такие числа мы будем называть *конструктивными.* Все остальные действительные числа, которые не могут быть представлены в виде суммы (6), являются *неконструктивными.* Ясно, что к «неконструктивным» числам относятся, прежде всего, все иррациональные числа, в частности, главные математические константы π и e, число $\sqrt{2}$, «золотая пропорция» и т.д. Но в рамках определения (6) к разряду «неконструктивных» мы должны отнести и некоторые рациональные числа (например, 2/3, 3/7 и т.д.), называемые «периодическими дробями», которые не могут быть представлены в виде конечной суммы (6). Заметим, что такой подход к числам, то есть, их деление на «конструктивные» и «неконструктивные», коренным образом отличается от принятого в математике деления чисел на «рациональные» и «иррациональные», так как к разряду «неконструктивных» относятся все «периодические дроби», а к классу «конструктивных», как показано ниже, относятся некоторые иррациональные числа (в частности, степени «золотой пропорции» и их суммы).

Заметим, что хотя определение (6) значительно ограничивает множество действительных чисел, это никак не умаляет его значение с «практической», вычислительной точки зрения. Легко доказать, что любое «неконструктивное» действительное число может быть представлено в виде (6) приближенно, причем ошибка приближения Δ будет неограниченно уменьшаться по мере увеличения числа членов в (6), однако $\Delta \neq 0$ для «неконструктивных» действительных чисел. По существу, в современных компьютерах мы пользуемся только «конструктивными» числами, задаваемыми (6), и это нас вполне устраивает, потому что любое «неконструктивное» число может быть представлено в виде (6) с погрешностью, потенциально стремящейся к 0.

2.3. *Определение Ньютона*

В течение многих тысячелетий математики развивали и уточняли понятие действительного числа. В 17-м веке в период зарождения современной науки и математики разрабатывается ряд методов изучения непрерывных процессов, и понятие действительного числа вновь выходит на передний план. Наиболее отчетливо новое определение этого понятия дается одним из основоположников математического анализа И. Ньютоном в его «Всеобщей Арифметике»:

«Под числами мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу».

Эта формулировка дает нам единое определение действительного числа, рационального или иррационального. Если теперь рассмотреть «Евклидово определение числа» (5) с точки зрения «определения Ньютона», то в качестве «другой величины того же рода, принятой за единицу», выступает «монада». В двоичной системе счисления (6) роль «единицы» играет число 2, то есть, основание системы счисления.

2.4. *Новое конструктивное определение действительного числа*

Рассмотрим теперь бесконечное множество геометрических отрезков, являющихся степенями золотой *p*-пропорции Φ_p :

$$G_p = \left\{\Phi_p^i, i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\right\} \tag{8}$$

где Φ_p (золотая *p*-пропорция) – положительный корень алгебраического уравнения

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0, \tag{9}$$

причем все степени Φ_p^i связаны между собой математическим тождеством:

$$\Phi_p^i = \Phi_p^{i-1} + \Phi_p^{i-p-1} = \Phi \times \Phi_p^{i-1} \tag{10}$$

Используя множество (8), можно «сконструировать» следующий способ позиционного представления действительных чисел:

$$A = \sum_i a_i \Phi_p^i, \tag{11}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ и $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Заметим, что выражение (11) «генерирует» бесконечное количество позиционных способов представления чисел (систем счисления), так как каждому *p* (*p*=0, 1, 2, 3, …) соответствует своя система счисления типа (11). Заметим, что при *p*=0 основание $\Phi_p = \Phi_0 = 2$ и система счисления (11) сводится к классической двоичной системе (6).

Рассмотрим случай *p*=1. Для этого случая основанием системы счисления (11) является классическая «золотая пропорция» $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и система (11) сводится к системе счисления с иррациональным основанием, предложенной в 1957 г. юным (12-летним) американским математиком **Джорджем Бергманом** [12]:

$$A = \sum_i a_i \Phi^i \ . \tag{12}$$

Рассмотрим теперь случай *p*=∞. Для этого случая основание Φ_p стремится к 1, а это означает, что в пределе выражение (11) стремится к классическому Евклидовому определению числа, задаваемому (5).

Таким образом, мы можем рассматривать позиционный способ представления чисел, задаваемый (11), как весьма широкое обобщение и развитие «Евклидового определения» числа (5), двоичной системы (6) и системы Бергмана (12).

2.5. *Необычные свойства кодов золотой p-пропорции*

Система счисления (11) обладает рядом необычных свойств, которые выделяют их среди других позиционных систем счисления. Первое из них состоит в том, что (за исключением случая *p*=0 – классическая двоичная система) основанием всех систем счисления (11) являются **иррациональные числа** $\Phi_p\left(p=1,2,3,...\right)$.

Что это означает? Это означает, что на передний план в теории чисел выдвигаются некоторое особое множество иррациональных чисел – *золотые p-пропорции,* с помощью которых можно представить любые действительные числа в виде сумм (11), (12). Напомним, что при заданном *p*=0,1,2,3,.. *золотую p-пропорцию* Φ_p можно вычислить как предел, к которому стремится отношение соседних *p-чисел Фибоначчи,* то есть, $\Phi_p=\underbrace{\lim}_{n\to\infty}\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)}$; при этом, как известно [3], сами *p-числа Фибоначчи* тесно связаны с *треугольником Паскаля* и совпадают с его «диагональными суммами». То есть, *золотые p-пропорции* являются некоторой «тайной» треугольника Паскаля – одного из важнейших математических объектов.

Заметим, что выражения (11) и (12) разделяют все действительные числа на две группы: «конструктивные числа», которые могут быть представлены в виде конечной суммы степеней золотой *p*-пропорции в виде (11), (12) и «неконструктивные» числа, которые не могут быть представлены в виде суммы (11), (12). Ясно, что все степени золотой *p*-пропорции типа $\Phi_p^i, i=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$ могут быть представлены в виде (11). Например,

$$\Phi_p^3=1000;\quad \Phi_p^2=100;\quad \Phi_p^1=10;\quad \Phi_p^{-1}=0{,}1;\quad \Phi_p^{-2}=0{,}01;\quad \Phi_p^{-3}=0{,}001$$

Это означает, что все иррациональные числа типа $\Phi_p^i, i=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$ (степени золотой *p*-пропорции) являются «конструктивными числами» в рамках определения (11). Из определения (11) также вытекает, что все действительные числа, являющиеся суммами степеней золотой *p*-пропорции, также являются «конструктивными числами» в смысле (11). Например, действительное число $A=\Phi_p^2+\Phi_p^{-1}+\Phi_p^{-3}$ в соответствии с (11) может быть представлено в виде следующей кодовой комбинации:

$$A = 100{,}101.$$

Заметим, что возможность представления некоторых иррациональных чисел (степеней золотой *p*-пропорции и их сумм) в виде конечной совокупности «битов» является еще одним необычным свойством введенных выше позиционных представлений (11), (12), которое противоречит нашим традиционным представлениям о системах счисления.

3. «Золотая» теория чисел

3.1. *Некоторые необычные свойства чисел Фибоначчи и их обобщений – p-чисел Фибоначчи*

Традиционно при рассмотрении чисел Фибоначчи F_n (1,1,2,3,5,8,13,...) и чисел Люка L_n (1,3,4,7,11,18,...) подразумевается, что их индексы n являются натуральными числами, то есть, n = 1, 2, 3, … . Оказывается, однако, что они могут быть расширены в сторону отрицательных значений индексов n, то есть, когда индексы n принимают значения из множества: n = 0, -1, -2, -3, … . Расширенные таким образом числа Фибоначчи и Люка представлены в Табл. 1. Как вытекает из этой таблицы, члены последовательностей F_n и L_n обладают рядом чудесных математических свойств.

Например, для нечетных индексов n=2k+1 члены последовательностей F_n and F_{-n} совпадают, то есть, $F_{2k+1} = F_{-2k-1}$, а для четных $n = 2k$ они противоположны по знаку, то есть: $F_{2k} = -F_{-2k}$ (выделены жирным шрифтом). Что касается чисел Люка L_n, то здесь все наоборот, то есть, $L_{2k} = L_{-2k}$; $L_{2k+1} = -L_{-2k-1}$ (выделены жирным шрифтом).

Таблица 1. Расширенные числа Фибоначчи и Люка

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	**1**	2	**3**	5	**8**	13	**21**	34	**55**
F_{-n}	0	1	**-1**	2	**-3**	5	**-8**	13	**-21**	34	**-55**
L_n	2	**1**	3	**4**	7	**11**	18	**29**	47	**76**	123
L_{-n}	2	**-1**	3	**-4**	7	**-11**	18	**-29**	47	**-76**	123

Оказывается, что подобным свойством обладают и *p-числа Фибоначчи* (см. Табл. 2) [13].

Таблица 2. Расширенные p-числа Фибоначчи

n	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
$F_1(n)$	21	13	8	5	3	2	1	1	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21
$F_2(n)$	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	1	0	-1	1	1	-2	0
$F_3(n)$	5	4	3	2	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	-1	1	0
$F_4(n)$	4	3	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1
$F_5(n)$	3	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Еще одним необычным свойством чисел Фибоначчи и Люка являются так называемые *формулы Бине,* связывающие числа Фибоначчи и Люка с «золотой пропорцией»:

$$\Phi^n = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}. \tag{13}$$

В дальнейшем мы будем использовать следующие известные тождества для чисел Фибоначчи и чисел Люка:

$$F_{i+1} = \frac{L_i + F_i}{2}, \tag{14}$$

$$L_{i+1} = F_{i+1} + 2F_i \tag{15}$$

В справедливости этих тождеств можно убедиться, используя Табл. 1.

3.2. *Новое свойство натуральных чисел*

Как упоминалось выше, «Евклидово определение» (5), «порождает» не только натуральные числа, но и всю проблематику их теории. Но тогда можно высказать предположение, что новое определение действительного числа, задаваемое (11) или (12), может стать источником интересных теоретико-числовых результатов.

Для установления таких результатов рассмотрим представления натуральных чисел в *системе Бергмана* (12) и *коде золотой p-пропорции* (11):

$$N = \sum_i a_i \Phi^i \tag{16}$$

$$N = \sum_i a_i \Phi_p^i. \tag{17}$$

Представление (16) будем называть Φ-кодом натурального числа N, представление (17) - Φ_p-кодом натурального числа N [11].

В статье [11] и книге [13] доказана следующая необычная теорема.

Теорема 1. Для заданного целого $p = 1,2,3,...$ сумма, задающая Φ-код (16) или Φ_p-код (17), всегда является конечной для любого натурального *N*.

Это означает, что все натуральные числа *N* являются «конструктивными» в рамках позиционных представлений (16), (17). Если учесть, что все степени золотой пропорции Φ^i или Φ_p^i являются иррациональными числами, утверждение, задаваемое Теоремой 1, являются далеко не тривиальным. Но поскольку Теорема 1 имеет отношение ко всем натуральным числам, то это означает, что Теорема 1 задает **новое свойство натуральных чисел**. Это означает, что спустя 2,5 тысячелетий после начала изучения натуральных чисел мы установили новое свойство натуральных чисел. **И это стало возможным только благодаря введению системы Бергмана в 1957 г. [12] и кодов золотой *p*-пропорции в 1980 г. [8].**

3.3. *Z-свойство натуральных чисел*

Рассмотрим еще один необычный результат, названный в [11] *Z-свойством натуральных чисел*. Это свойство справедливо для Φ-кода натурального числа *N*, задаваемого (16).

Согласно Теореме 1 сумма (16), задающая Φ-код, для любого натурального *N* является конечной.

А теперь подставим выражение (13) вместо Φ^i в выражение (16). В результате получим следующую формулу:

$$N = \frac{1}{2}\left(A + B\sqrt{5}\right), \tag{18}$$

где

$$A = \sum_i a_i L_i \tag{19}$$

$$B = \sum_i a_i F_i \,. \tag{20}$$

Выражение (18) может быть также записано в виде:

$$2N = A + B\sqrt{5}\,. \tag{21}$$

Заметим, что двоичные цифры a_i в выражениях (19), (20) совпадают с соответствующими двоичными цифрами в выражении (16), задающем Φ-код натурального числа *N*.

Рассмотрим теперь выражение (21). Если принять во внимание, что суммы (19), (20) всегда являются целыми числами, то возникает вопрос: при каких условиях выражение (21) может быть справедливым в общем случае, то есть, для любого натурального *N*? Ответ очень простой: это возможно только в том случае, если член *A*, задаваемый (19), является четным числом, равным $2N$, а член *B*, задаваемый (20), тождественно равен 0, то есть:

$$A = \sum_i a_i L_i = 2N \tag{22}$$

$$B = \sum_i a_i F_i = 0\,. \tag{23}$$

А теперь сравним выражения (16) и (23). Так как двоичные цифры a_i в рассмотренных выражениях совпадают, то это означает, что выражение (23) получается из выражения (16) путем простой замены всех степеней золотой пропорции Φ^i в формуле (16) соответствующими числами Фибоначчи F_i, взятыми из Табл.1.

Сформулируем результат, вытекающий из сравнения выражений (16) и (23), в виде следующей теоремы.

Теорема 2 (Z-свойство натуральных чисел). Если в выражении для Φ-кода любого натурального числа *N*, задаваемого (16), заменить все степени золотой пропорции

Φ^i соответствующими числами Фибоначчи F_i (i=0, ±1, ±2, ±3, …), то возникающая при этом сумма $\sum_i a_i F_i$ тождественно равна нулю независимо от исходного натурального числа N, то есть,

$$\sum_i a_i F_i = 0. \tag{24}$$

Примем без доказательства еще одну теорему [13], которое является обобщением Теоремы 2.

Теорема 3 (Z_p-свойство натуральных чисел). Если в выражении для Φ_p-кода любого натурального числа N, задаваемого (17), заменить все степени золотой p-пропорции Φ_p^i соответствующими p-числами $F_p(i)(i=0,\pm1,\pm2,\pm3,...)$, то возникающая при этом сумма $\sum_i a_i F_p(i)$ всегда тождественно равна нулю независимо от исходного натурального числа N, то есть,

$$\sum_i a_i F_p(i) = 0. \tag{25}$$

Существенно подчеркнуть, что утверждения Теорем 2 и 3 справедливы только для натуральных чисел, то есть, ***Z***- и Z_p-свойства (от слова «Zero» - нуль) также представляют собой новые свойства натуральных чисел.

3.4. *F*- и *L*-коды

Рассмотрим выражение (18). Учитывая, что коэффициент B в этом выражении тождественно равен нулю (согласно **Z**-свойству), мы можем представить выражение (18) в следующем виде:

$$N = \frac{1}{2}(A+B) \tag{26}$$

где A определяется выражением (22), а B - выражением (23).

Принимая во внимание выражения (22) и (23), а также тот факт, что все двоичные коэффициенты в этих выражениях совпадают, мы можем представить выражение (26) в следующем виде:

$$N = \sum_i a_i \frac{L_i + F_i}{2}. \tag{27}$$

Используя тождество (14), мы можем записать выражение (27) в виде:

$$N = \sum_i a_i F_{i+1} \tag{28}$$

Выражение (28) названо *F-кодом числа N* [13]. Таким образом, F-код представляет собой двоичное позиционное представление натурального числа N, в котором весами разрядов являются числа Фибоначчи F_{i+1}, выбираемые из Табл. 1.

А теперь сравним выражения (16) и (28). Так как двоичные цифры a_i в этих выражениях совпадают для любого i=0, ±1, ±2, ±3, … , то отсюда вытекает, что F-код числа N может быть получен из Φ-кода (16) того же самого натурального числа N путем простой замены степеней золотой пропорции Φ^i в формуле (16) на соответствующие числа Фибоначчи F_{i+1}.

Представим теперь F-код числа N в следующей форме:

$$N = \sum_i a_i F_{i+1} + 2B, \tag{29}$$

где член B определяется выражением (23). Тогда выражение (29) может быть представлено в следующем виде:

$$N = \sum_i a_i (F_{i+1} + 2F_i). \tag{30}$$

Принимая во внимание тождество (15), выражение (30) может быть представлено в следующем виде:

$$N = \sum_i a_i L_{i+1} . \qquad (31)$$

Будем называть выражение (31) *L-кодом числа N* [13]. Таким образом, L-код представляет собой двоичное позиционное представление натурального числа N, в котором весами разрядов являются числа Люка L_{i+1}.

. Так как двоичные цифры в выражениях (16) и (31) совпадают, отсюда вытекает, что L-код числа N может быть получен из Φ-кода (16) того же самого числа N путем замены степеней золотой пропорции Φ^i в формуле (16) соответствующими числами Люка L_{i+1}, где $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. Ясно, что L-код числа N может быть получен также из F-кода того же самого числа N путем замены чисел Фибоначчи F_{i+1} в формуле (28) числами Люка L_{i+1} .

Таким образом, существуют три различных способа представления одного и того же натурального числа N: Φ-код (16), задающий натуральное число N в виде конечной суммы степеней золотой пропорции, F-код (28), задающий натуральное число N в виде суммы чисел Фибоначчи, и L-код (31), задающий натуральное число N в виде суммы чисел Люка; при этом по форме двоичной записи все эти коды совпадают.

В качестве примера рассмотрим представление десятичного числа 10 (основание десятичной системы) в Φ-коде (16):

$$10=10100{,}0101. \qquad (32)$$

Для Φ-кода (16) «золотое» представление (32) имеет следующую алгебраическую интерпретацию:

$$10 = \Phi^4 + \Phi^2 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4}. \qquad (33)$$

Используя формулу (13), мы можем представить сумму (33) следующим образом:

$$10 = \frac{L_4 + F_4\sqrt{5}}{2} + \frac{L_2 + F_2\sqrt{5}}{2} + \frac{L_{-2} + F_{-2}\sqrt{5}}{2} + \frac{L_{-4} + F_{-4}\sqrt{5}}{2}. \qquad (34)$$

Используя Табл. 1, мы можем записать следующее соотношения:

$$L_{-2}=L_2;\ L_{-4}=L_4;\ F_{-2}=-F_2;\ F_{-4}=-F_4. \qquad (35)$$

Тогда с учетом (35) выражение (34) может быть записано в следующем виде:

$$10 = \frac{2(L_4 + L_2)}{2} = L_4 + L_2 = 7 + 3.$$

Теперь рассмотрим интерпретацию «золотого» представления (32) в виде F- и L-кодов:

$$F-\textbf{код}: \mathbf{10} = F_5 + F_3 + F_{-1} + F_{-3} = \mathbf{5+2+1+2}$$

$$L-\textbf{код}: \mathbf{10} = L_5 + L_3 + L_{-1} + L_{-3} = \mathbf{11+4-1-4}$$

Также мы можем проверить справедливость Z-свойства для «золотого» представления (32). Если мы заменим степени Φ^i в (33) соответствующими числами Фибоначчи F_i, мы получим следующий результат:

$$Z-\textbf{свойство}: \mathbf{10} = F_4 + F_2 + F_{-2} + F_{-4} = \mathbf{3+1+(-1)+(-3)=0}.$$

4. Приложения кодов золотой пропорции

Существуют различные критерии для оценки результативности того или иного научного исследования. Пуанкаре называл изящным математическое исследование, позволяющее вывести наибольшее число положений из наименьшего числа посылок. Для Эйнштейна такими критериями являются «внешнее оправдание» (согласие с опытом) и «внутреннее совершенство» (изящество теории отражает ее близость к действительному миру). Мнение Эйнштейна совпадает с «Принципом математической красоты Дирака» (*«Красота является критерием истинности физической теории»*). Наконец, результативность теории оценивают наличием «неожиданных», непредсказуемых результатов.

Очевидно, что «теория систем счисления с иррациональными основаниями» с лихвой удовлетворяет всем перечисленным критериям (Пуанкаре, Эйнштейна и Дирака). В этой теории имеется ряд «неожиданных», непредсказуемых результатов, к разряду которых относятся новые свойства натуральных чисел (Теорема 1, *Z*-свойство натуральных чисел, *F*- и *L*-коды).

Покажем теперь, что эта теория удовлетворяет и критерию «внешнего оправдания», то есть, что эта теория является «практически полезной».

4.1. *«Золотые» резистивные делители (аттенюаторы)*

В современной цифровой измерительной технике широко используются для преобразования двоичного кода в эквивалентное напряжение широко используются резистивные делители. Простейшим из них является делитель типа R-2R, в котором используется резисторы двух номиналов R и 2R. Теория кодов золотой пропорции привела к разработке «золотых» резистивных делителей [14,15].

Рассмотрим делитель на Рис. 1, в котором значения резисторов *R*1, *R*2 и *R*3 выбраны следующим образом:

$$R1 = \Phi_p^{-p} R; R2 = \Phi_p^{p+1} R; R3 = \Phi_p R, \tag{36}$$

где Φ_p - золотая *p*-пропорция, $p=0,1,2,3,\ldots$.

Ясно, что делитель на Рис. 1 при условии (36) задает бесконечное число различных делителей, так как каждое *p* «генерирует» свой собственный делитель. В частности, при $p=0$ золотая *p*-пропорция $\Phi_p = \Phi_0 = 2$ и резисторы *R*1, *R*2 и *R*3 принимают следующие значения:

$$R1 = R; R2 = 2R; R3 = 2R, \tag{37}$$

откуда вытекает, что при $p=0$ «золотой» делитель (37) сводится к классическому двоичному делителю, на котором основана вся современная цифровая метрология и техника аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразования.

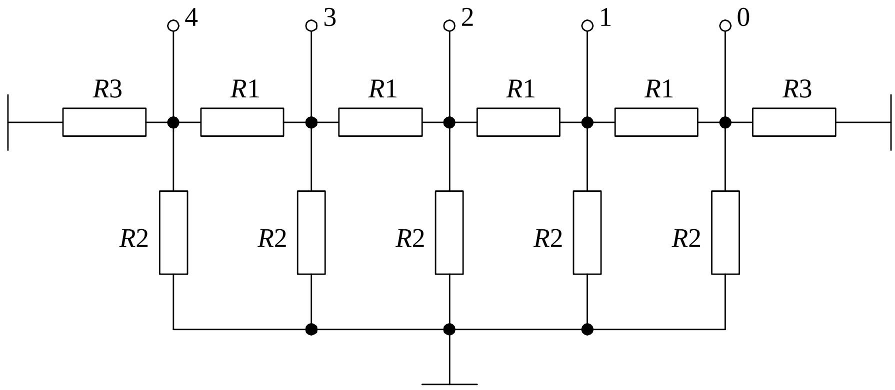

Рисунок 1. «Золотые» резистивные делители

Для случая $p=1$ резисторы *R*1, *R*2, *R*3 принимают следующие значения:

$$R1 = \Phi^{-1} R; R2 = \Phi^2 R; R3 = \Phi R, \tag{38}$$

где $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ - классическая золотая пропорция.

Для вывода математических соотношений, лежащих в основе «золотого» резистивного делителя на Рис. 1, будем использовать следующие тождества для золотой *p*-пропорции:

$$\Phi_p = 1 + \Phi_p^{-p} \tag{39}$$

$$\Phi_p^{p+2} = \Phi_p^{p+1} + \Phi_p. \tag{40}$$

Используя закон Ома и тождество (40), легко вычислить эквивалентное сопротивление резисторной цепи на Рис. 1 справа от точки 0 и слева от точки 4:

$$R_{e1} = \frac{R2 \times R3}{R2 + R3} = \frac{\Phi_p^{p+1} R \times \Phi_p R}{\Phi_p^{p+1} R + \Phi_p R} = R. \tag{41}$$

Используя выражение (41) и тождество (39), легко вычислить эквивалентное сопротивление резисторной цепи на Рис. 1 справа от точки 1 и слева от точки 3:

$$R_{e2} = \Phi_p^{-p} R + R = \Phi_p R. \tag{42}$$

С использованием вышеприведенных выражений, легко вычислить эквивалентное сопротивление резисторной цепи на Рис. 1 в любой из точек 0, 1, 2, 3, 4:

$$R_{e3} = \frac{\Phi_p R \times R}{\Phi_p R + R} = \frac{\Phi_p}{\Phi_p + 1} R = \frac{1}{1 + \Phi_p^{-1}} R. \tag{43}$$

Легко найти коэффициент передачи по напряжению между соседними точками 0-1, 1-2, ..., 3-4:

$$K_U = \frac{U}{\Phi_p}\ , \tag{44}$$

то есть, коэффициент передачи по напряжению между соседними точками 0, 1, 2, 3, 4 в резистивной цепи на Рис. 4 обратно пропорционален золотой *p*-пропорции Φ_p.

Заметим, что при $p = 0$ выражения (41) и (42) сводятся к хорошо известным выражениям:

$$R_{e3} = \frac{2}{3} R \quad \text{и} \quad K_U = \frac{U}{2}, \tag{45}$$

задающих свойства классического двоичного делителя.

Таким образом, «золотые» резистивные делители, основанные на золотой *p*-пропорции Φ_p, являются основой «золотой» метрологии [14] и “золотых» цифро-аналоговых и аналого-цифровых преобразователей [15].

4.2. «Золотая» компьютерная арифметика и микропроцессоры Фибоначчи

Коды Фибоначчи и золотой пропорции положены в основу «золотой» арифметики, описание которой дано в работах [9,16-19]. Как показано в статьях [18,19], эта арифметика может быть положена в основу **«микропроцессоров Фибоначчи как одной из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем».**

Приведем заключение из статьи [19]:

«Основываясь на своем 40-летнем опыте работы в этой области, полученных научных и инженерных результатах [1-21], автор берет на себя смелость утверждать следующее:

1. *В течение многих десятилетий в микроэлектронике, компьютерных технологиях и цифровой метрологии доминировало «двоичное отношение» и «двоичная система». Это привело к беспрецедентным по своим масштабам темпам развития информационной технологии. К сожалению, двоичная система обладает* ***НУЛЕВОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ,*** *и в ней отсутствует механизмы для обнаружения и исправления ошибок, которые неизбежно (с большей или меньшей вероятностью) могут возникнуть в элементах электронных систем под влиянием различных внешних и внутренних факторов (радиация, электромагнитные воздействия, помехи в шинах питания и т.д.). Поэтому дальнейшее развитие микропроцессорной техники и компьютерной технологии на основе классической двоичной системы счисления следует признать* ***тупиковым направлением****. Двоичная система не может служить информационной и арифметической основой специализированных компьютерных и измерительных систем (космос, управление транспортом и сложными*

технологическими объектами), включая наноэлектронные системы, где проблемы надежности, помехоустойчивости, контролеспособности, стабильности, живучести систем выходят на передний план.

2. *Настало время заменить «двоичное отношение» и двоичную систему на «золотое отношение», фибоначчиеву и «золотую» системы счисления.* ***Альтернативы для кодов Фибоначчи и «золотых» кодов среди существующих позиционных систем счисления и избыточных кодов при создании высоконадежных микропроцессоров и специализированных компьютерных и измерительных систем, включая наноэлектронные системы, не существует!*** *Микропроцессоры Фибоначчи открывают новую эру в развитии микропроцессоров и, в перспективе, нанопроцессоров!*
3. *Фибоначчиевая и «золотая» арифметика, микропроцессоры Фибоначчи, «золотые» аналого-цифровые и цифроаналоговые преобразователи [9], «золотая» троичная зеркально-симметричная арифметика [18], новая теория корректирующих кодов, основанная на «матицах Фибоначчи» [21] и другие идеи и концепции, возникшие в рамках «математики гармонии» [4], могут стать началом «золотой» компьютерной технологии.*
4. *Использование "золотого сечения" в современных информационных технологиях означает возврат к Пифагору, Платону и Евклиду. Это означает использование «естественных законов природы» для улучшения информационных технологий.*
5. *Важно подчеркнуть, что это направление родилось в Советском Союзе (Таганрогский радиотехнический институт и Винницкий политехнический институт). 65 зарубежных патентов США, Японии, Великобритании, Франции, Германии, Канады и других стран в области "компьютеров Фибоначчи" являются свидетельством мирового приоритета советской науки (и автора настоящей статьи) в этой важной области информатики».*

4.3. *«Золотая» троичная зеркально-симметричная арифметика*

Еще один интересный результат в области приложений «систем счисления с иррациональными основаниями» - это «золотая» троичная зеркально-симметричная арифметика, описанная в работе [20]. Новая троичная арифметика, является оригинальным синтезом троичной симметричной системы счисления, использованной **Николаем Брусенцовым** в компьютере «Сетунь», и системы Бергмана (12). Для пояснения сути нового троичного способа представления чисел, основанного на «золотой пропорции», рассмотрим бесконечную последовательность четных степеней золотой пропорции:

$$\left\{\Phi^{2i}\right\}, i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \tag{46}$$

где $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/\ 2$ - золотая пропорция.

Ясно, что указанная последовательность (46) представляет собой геометрическую прогрессию с основанием $\Phi^2 = \left(3+\sqrt{5}\right)/\ 2$. Последовательность (46) мы будем использовать в качестве весов разрядов для позиционного «троичного» представления чисел, используя троичные цифры $\left\{\bar{1}, 0, 1\right\}$.

Из теории золотого сечения известно следующее важное тождество, связывающее члены рассматриваемой последовательности:

$$\Phi^{2k} + \Phi^{2k} = 2\Phi^{2k} = \Phi^{2(k+1)} - \Phi^{2k} + \Phi^{2(k-1)}, \tag{47}$$

то есть, сумма двух одинаковых четных $(2k)$-х степеней золотой пропорции равна алгебраической сумме трех четных степеней золотой пропорции, а именно $2(k+1)$-й степени, взятой со знаком «плюс», $(2k)$-й степени, взятой со знаком «минус», и $2(k-1)$-й степени, взятой со знаком «плюс». На языке «троичных» цифр 1, 0 и $\bar{1}$ указанное тождество имеет следующую кодовую интерпретацию:

$$1+1=1\bar{1}1. \tag{48}$$

Выражения (47), (48) задает правило сложения положительных единиц в новой системе счисления. Это правило гласит, что при сложении положительных единиц необходимо записать отрицательную единицу $\bar{1}$ в текущий разряд промежуточной суммы и сформировать симметрично относительно текущего разряда две положительные единицы, которые являются переносами в соседние (слева и справа) разряды.

Ясно, что не существует никаких проблем по аналогии записать правило сложения отрицательных единиц:

$$\bar{1}+\bar{1}=\bar{1}1\bar{1}. \tag{49}$$

К указанным выше правилам добавим еще четыре правила, которые полностью совпадают с аналогичными правилами сложения в троичной симметричной системе счисления:

$$0+0=0; 1+0=1; \bar{1}+0=\bar{1}; 1+\bar{1}=0.$$

В результате получается следующая таблица сложения чисел в новой системе счисления. Эта таблица задает правило сложения двух одноименных троичных разрядов $a_k + b_k$:

a_k / b_k	1	0	$\bar{1}$
1	$1\bar{1}1$	1	0
0	1	0	$\bar{1}$
$\bar{1}$	0	$\bar{1}$	$\bar{1}1\bar{1}$

(50)

Теперь используем таблицу (50) для «конструирования» изображений натуральных чисел в «золотой» троичной системе счисления, в которой весами разрядов являются четные степени золотой пропорции.

Поскольку $1=\Phi^0$, то число 1 в новой системе счисления мы можем представить с помощью следующей записи: 1 = 1,0. Заметим, что запятая, стоящая после 1, означает, что 1 относится к нулевому разряду.

Для получения записи числа 2 используем указанное выше правило (49) для сложения двух положительных единиц. В соответствии с этим правилом число 2 можно представить в виде следующей записи:

$$2=1\bar{1},1. \tag{51}$$

Запись означает, что число 2 может быть выражено в виде суммы трех четных степеней золотой пропорции, то есть,

$$2=\Phi^2-\Phi^0+\Phi^{-2}. \tag{52}$$

Добавляя теперь положительную единицу к нулевому разряду кодовой записи числа 2, получим «троичную» запись числа:

$$3 = 10,1. \tag{53}$$

Эта запись означает ни что иное, как сокращенную цифровую запись следующего выражения:

$$3=\Phi^2+\Phi^{-2}. \tag{54}$$

Ясно теперь, что число 4 имеет следующую цифровую запись:

$$4=11,1, \tag{55}$$

что является цифровой записью следующей суммы:

$$4=\Phi^2+\Phi^0+\Phi^{-2}. \tag{56}$$

Продолжая эти рассуждения, мы получим изображения всех других натуральных чисел, в частности:

$$5=1\bar{1}1,\bar{1}1; \; 6=10\bar{1},01; \; 7=100,01; \; 8=101,01; \; 9=11\bar{1},11; \; 10=110,11. \tag{57}$$

Таким образом, в результате проведенных рассуждений мы пришли к следующему позиционному представлению целых чисел:

$$N = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i \left(\Phi^2\right)^i, \qquad (58)$$

где c_i – троичная цифра $\left(\bar{1},0,1\right)$ i-го разряда, $\left(\Phi^2\right)^i$ – вес i-го разряда позиционного представления (57), $\Phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ - основание системы счисления (58).

Анализ троичных позиционных представлений (51), (53), (55), (57) позволяет обнаружить одно интересное свойство «золотого» троичного кода (58). Нулевой разряд разбивает троичную кодовую комбинацию на две зеркально-симметричных части – в этом и состоит *свойство зеркальной симметрии*, характерное для троичных кодов типа (58). Основываясь на этом фундаментальном свойстве, мы будем называть троичный код (58) *троичной зеркально-симметричной системой счисления* [20].

Новая компьютерная арифметика может быть положена в основу специализированных процессоров для цифровой обработки сигналов.

Публикация статьи [20] вызвала оживленную реакцию западных компьютерных специалистов. Но первым поздравил автора с публикацией этой статьи выдающийся американский математик и специалист в области компьютерных наук **Дональд Кнут**, автор всемирно известного бестселлера «Искусство программирования». Эта фундаментальная монография посвящена рассмотрению и анализу важнейших алгоритмов, используемых в информатике. В 1999 году книга была признана одной из двенадцати лучших физико-математических монографий столетия. В своем письме **Дональд Кнут** заверил меня, что информация о «золотой» троичной зеркально-симметричной арифметике будет включена в новое издание его всемирно известной книги.

5.Заключение

Существенно подчеркнуть, что **до работы Бергмана [12] систем счисления с иррациональными основаниями в математике не существовало!** Это означает, что системы счисления с иррациональными основаниями (*система Бергмана* [12] и ее обобщение – *коды золотой p-пропорции* [8,9]) можно считать «прорывом» в области систем счисления, которые исторически являются первыми арифметическими результатами (Вавилонская 60-ричная система) и возникли в математике задолго до создания «элементарной теории чисел», описанной в «Началах» Евклида. **И поэтому у нас есть все основания утверждать, что *система Бергмана* [12] и *коды золотой p-пропорции* [8,9] являются важнейшими современными открытиями в области систем счисления, сравнимыми разве что с открытием позиционного принципа представления чисел (Вавилон), а также десятичной и двоичной систем счисления. Системы счисления с иррациональными основаниями, задаваемые (11), (12), переворачивает наши представления о системах счисления; более того - соотношение между рациональными и иррациональными числами. В этих системах на первый план выдвигаются иррациональные числа – *золотые p-пропорции* $\Phi_p \left(p=1,2,3,...\right)$, которое являются основанием, началом всех чисел, так как с их помощью может быть представлено любое действительное число!** А поскольку приоритет в открытии систем счисления с иррациональными основаниями принадлежит **Джорджу Бергману** [12], то мы вправе утверждать, что 12-летний американский вундеркинд **Джордж Бергман** вполне заслуживает таких же высоких почестей за свое математическое открытие, как и **Григорий Перельман**!

Особого внимания заслуживают перспективы использования «систем счисления с иррациональными основаниями» для создания новых средств компьютерной и измерительной техники [14-20].

Литература

1. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.
2. Алипов Н.В., Витенько И.В., Стахов А.П. Корректирующие (*i*,*k*,*S*)-алгоритмы. - В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.
3. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
4. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. Москва, Знание, серия «Математика и кибернетика», вып.6, 1979 г.
5. Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.
6. Стахов А.П. «Фибоначчиева» двоичная арифметика и ее применение для контроля вычислительных систем. – В кн. Однородные вычислительные системы и среды. Материалы IV Всесоюзной конференции. Киев, «Наукова думка», 1975.
7. Стахов А.П. Использование естественной избыточности «фибоначчиевых» систем счисления для контроля вычислительных систем. Автоматика и вычислительная техника, №6, 1975 г.
8. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г.
9. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
10. Митропольский Ю.А. Отзыв о научном направлении украинского ученого, доктора технических наук, профессора Алексея Петровича Стахова // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12452, 23.09.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/006a/02320005.htm
11. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
12. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
13. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey. London. Singapore. Hong Kong: World Scientific, 2009.
14. Стахов А.П. Цифровая метрология в кодах Фибоначчи и кодах золотой пропорции. В сб. Современные проблемы метрологии. Москва, Изд-во Всесоюзного заочного машиностроительного института, 1978 г.
15. Стахов А.П. Перспективы применения систем счисления с иррациональными основаниями в технике аналого-цифрового и цифроаналогового преобразования. Журнал «Измерения, Контроль, Автоматизация», №6, 1981 г.
16. А.П. Стахов, Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 1. Математика Гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14876, 16.09.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321089.htm
17. А.П. Стахов, Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 2. «Золотая» Информационная Технология // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14878, 19.09.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321090.htm
18. А.П. Стахов, Микропроцессоры Фибоначчи - как одна из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16759, 16.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321212.htm

19. А.П. Стахов, Микропроцессоры Фибоначчи - как одна из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем. Міжнародний науково-технічний журнал «Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах, №2, 2011.
20. Stakhov AP. Brousentsov’s ternary principle, Bergman’s number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic. The Computer Journal 2002, Vol. 45, No. 2: 222-236.