А.П. Стахов

Конструктивная (алгоритмическая) теория измерения, системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии

Алгебру и Геометрию постигла одна и та же участь. За быстрыми успехами в начале следовали весьма медленные и оставили науку на такой ступени, где она еще далека от совершенства. Это произошло, вероятно, от того, что Математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою.

Николай Лобачевский

Часть 7. Математика гармонии: наиболее яркие страницы

*Если рассмотреть историю математики с момента ее зарождения, то, согласно А.Н. Колмогорову, ее развитие стимулировалось практическими потребностями в **счете**, что привело к открытию позиционного принципа представления чисел (Вавилонская 60-ричная система счисления) и «созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел» (А.Н. Колмогоров), и в **измерении,** что вызвало «развитие начатков геометрии» (А.Н. Колмогоров) и привело к открытию «несоизмеримых отрезков». Однако, согласно **«гипотезе Прокла»**, создание древнегреческой математики, которая лежит в основе современной математики, осуществлялось под мощным влиянием **«идеи гармонии»** - главной идеи древнегреческой науки. Наиболее ярко это влияние отразилось в «Началах» Евклида, главной целью которых стало создание завершенной геометрической теории **Платоновых тел**, выражавших в древнегреческой науке «гармонию Мироздания». В настоящей статье обсуждаются три новые математические теории, которые возникли в современной науке в развитие трех фундаментальных проблем, лежащих в основании математики - счета, измерения и гармонии: **алгоритмическая теория измерения**, **системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии**. В основе алгоритмической теории измерения (АТИ) лежит абстракция потенциальной бесконечности, то есть, она является **конструктивной математической теорией измерения** (без аксиомы Кантора). Предметом исследований в АТИ являются оптимальные, то есть, наилучшие в определенном смысле алгоритмы измерения. Основным математическим результатом АТИ является синтез новых, неизвестных ранее алгоритмов измерения, которые порождают новые, неизвестные ранее позиционные системы счисления. Наиболее неожиданными результатами АТИ являются так называемые **биномиальные алгоритмы измерения**, основанные на «арифметическом квадрате» (треугольнике Паскаля), и **фибоначчиевые алгоритмы измерения,** которые привели к открытию новых числовых последовательностей, названных **p-числами Фибоначчи**. Фибоначчиевы алгоритмы измерения лежат в основе **p-кодов Фибоначчи** – новых способов позиционного представления натуральных чисел, которые являются обобщением классической двоичной системы. Эти позиционные представления были положены в основу нового направления в компьютерной науке – **компьютеров Фибоначчи** (65 патентов США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канады и др. стран). **Системы счисления с иррациональными основаниями (коды золотой p-пропорции)** являются новыми способами позиционного представления действительных чисел. Они переворачивают наши традиционные представления о системах счисления и могут быть положены в основу **«золотой» теории чисел.** Наконец, **«математика гармонии»,** включающая в себя АТИ и коды золотой пропорции, является новым междисциплинарным направлением современной науки, которое может быть положено в основу новой математики, лишенной противоречий.*

Статья состоит из 8 частей:

1. *Роль измерения в развитии науки*
2. *Математическая теория измерения и проблема бесконечности*
3. *Математическая модель измерения. Оптимальные (n,k,0)-алгоритмы и классические позиционные системы счисления*
4. *Биномиальные алгоритмы измерения как источник биномиальных систем счисления*
5. *Задача Баше-Менделеева, принцип асимметрии измерения, фибоначчиевые алгоритмы измерения и p-коды Фибоначчи*
6. *Системы счисления с иррациональными основаниями как основа ««золотой» теории чисел*
7. *Математика гармонии: наиболее яркие страницы*
8. *Основные математические результаты, приложения и перспективы развития «математики гармонии»*

1. Немного истории

Подводя итог своим научным исследованиям, которые начались в Харьковском институте радиоэлектроники в 1963 г. (год моего вступления в аспирантуру, а также год организации Американской Фибоначчи Ассоциации и учреждения математического журнала “The Fibonacci Quarterly”), хотелось бы выделить следующие научные результаты, к которым я имею непосредственное отношение:

1. Первым из них является создание **«Алгоритмической теории измерения»,** изложенной мною в моей первой книге «Введение в алгоритмическую теорию измерения» (1977) [1]. Эта теория вызвала большой интерес специалистов в области измерительной техники и метрологии. Например, в 1990 г. издательство "Энергоатомиздат" (Москва) опубликовало книгу **П.А. Арутюнова** "Теория и применение алгоритмических измерений" [2]. Эта книга написана в развитие идей, изложенных в книге [1]. В Предисловии к своей книге П.А. Арутюнов, с которым, к сожалению, я лично не знаком, написал следующее: *"Данный материал согласуется с работами ученых, занимающихся проблемами теории измерения (А.Н. Колмогорова, Н.В. Хованова, А.П. Стахова, Я. Яворского, И. Пфанцагля, Д.Гофмана, В. Г. Кнорринга, С. Стивенса, Д.Зинеса, В. Торгенсона и др.)"*. Мне приятно, что в этом перечне действительно известных ученых в области теории измерения мое имя поставлено третьим после имени выдающегося советского математика **А.Н. Колмогорова** и рядом с именами таких классиков мировой науки в области теории измерения как **В.Г. Кнорринг**, **И.Пфанцагль, С.Стивенс, Д.Зинес** и др. Мне приятно также, что в этой книге впервые введено понятие **"алгоритмы Стахова".** Наверно, это и есть высшая награда для ученого, когда твоим научным результатам независимо от него присваивается его имя.

2. Вторым результатом является разработка **«Теории систем счисления с иррациональными основаниями (кодов золотой пропорции)».** Впервые об этих кодах я рассказал в статье [4]**,** опубликованной в 1980 г., а затем в книге «Коды золотой пропорции» (1984) [3]. К этим кодам я пришел независимо от американского математика **Джорджа Бергмана**, который еще в 1957 г. в статье [5] описал первую в истории математики систему счисления с иррациональным основанием. Хотя система Бергмана является частным случаем «кодов золотой *p*-пропорции», соответствующим случаю $p=1$, в своих публикациях [3,4] я всегда подчеркивал **приоритет Бергмана** в этом математическом открытии и тем самым следовал нормам научной этики (необходимо уважать работы своих предшественников). Коды золотой *p*-пропорции стали основой для разработки «золотой» теории чисел, изложенной мною в статье [6], опубликованной в 2004 г. в «Украинском математическом журнале». Большую популярность в широких кругах научной общественности СССР и за рубежом принесла мне научно-популярная статья "Коды Золотой Пропорции, или системы счисления для ЭВМ будущего?", которая была опубликована в июльском номере журнала "Техника-Молодежи" за 1985 год. Моя статья была "гвоздем" этого номера журнала, и обратная обложка этого

журнала была полностью посвящена моему научному направлению и моей новой книге "Коды Золотой Пропорции".

3. Следующим моим научным достижением являются **65 зарубежных патентов (США, Япония, Англия, Франция, ФРГ, Канада, Польша, ГДР).** Патентование началось в 1976 г. согласно решению Госкомизобретений СССР. Согласившись на это патентование, я очень рисковал своей научной репутацией. Ведь могло бы случиться так, что патентные ведомства зарубежных стран могли бы и не выдать патенты на мои изобретения. И тогда это означало бы, что я просто «обманул» те высокие советские инстанции, которые поверили мне и приняли решение о патентовании. Слава Богу, так не случилось. Зарубежные патентные ведомства ничего не могли противопоставить советским изобретениям в области «Компьютеров Фибоначчи». Высокая оценка советским изобретениям в области «Компьютеров Фибоначчи» была дана патентным поверенным СССР в Японии, которой в период своего приезда в Москву (1980 г.) в своем выступлении в Торгово-Промышленной Палате СССР отметил их мировую новизну и перспективность. Эти патенты являются юридическими документами, которые защищают приоритет советской науки (и мой приоритет) в области «Компьютеров Фибоначчи». В ноябре 1988 г. газета «Правда» опубликовала большую статью **«Вот вам и Фибоначчи! Стоит ли загонять в тупик новое научное направление?»** В результате этой публикации я стал в СССР весьма популярным ученым. Я получил огромное количество откликов на эту статью из всех уголков Советского Союза. Одним из них было письмо от выдающегося советского философа и методолога науки **Сергея Абачиева**, с которым я восстановил контакты только через 20 лет. Я благодарен Сергею Константиновичу за ряд публикаций на сайте АТ [7,8], в которых он поддержал мое научное направление.

4. Но главной теорией моей жизни является **«Математика гармонии»** - новое междисциплинарное направление современной науки, изложенная мною в книге **“The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science”** (World Scientific, 2009) [9]. Над разработкой такой теории я начал размышлять после публикации моей книги «Коды золотой пропорции» [3]. Публикации статьи в журнале «Техника-молодежи» способствовали популяризации моего научного направления, а интерес к моему научному направлению заставил меня задуматься над причинами этого интереса и я начал углубляться в другие области приложений «золотого сечения» такие, как философия, искусство, методологические проблемы науки. Винница, где я в тот период работал, неожиданно становится своеобразной "Меккой" для многих "золотоискателей", которые пожелали со мной познакомиться лично. Наиболее яркими событиями того периода являются посещения Винницы белорусским философом **Эдуардом Сороко**, московским композитором **Михаилом Марутаевым**, львовским архитектором **Олегом Боднаром**, а позже польским журналистом **Яном Гржездельским**, другом и научным консультантом **Станислава Лема**.

В беседах с этими выдающимися учеными и исследователями и зарождались основы той математической теории, которую я назвал «математикой гармонии».

С 1995 по 1997 годы я работал профессором кафедры компьютерной техники Университета Аль Фатех – ведущего университета Ливии. Именно в этот период от имени Университета Аль Фатех я представил 3 доклада на 7-ю Международную конференцию «Числа Фибоначчи и их приложения», которая состоялась в замечательном австрийском городе Грац в июле 1996 г. Наибольший интерес вызвал доклад **«The Golden Section and Modern Harmony Mathematics».** В этом докладе я впервые ввел понятие «Математика гармонии» (Harmony Mathematics). Этот доклад был рекомендован организационным комитетом для публикации и затем был опубликован в престижном математическом сборнике «Applications of Fibonacci Numbers» [10].

После возвращения в Украину после почти 5-летних «африканских путешествий» (Университет Аль Фатех, Триполи, Ливия, 1995-1997; Университет Эдуардо Мондлано, Мапуто, Мозамбик, 1998-2000) моей первой акцией стало создание в 2001 г. **Музея Гармонии и Золотого Сечения** (совместно с моей дочерью Анной Слученковой) http://www.goldenmuseum.com/. Отличительная особенность этого сайта по сравнению с сайтами подобного рода, выставленных на Интернете, состояла в том, что он был представлен на двух языках – русском и английском. Это стало причиной того факта, что этот сайт вызвал интерес не только на постсоветском пространстве, но и во всем мире. Благодаря этому сайту с моими работами познакомились многие западные ученые, в частности, проф. **Скотт Олсен** (США), который является ведущим американским ученым в области «золотого сечения».

29 мая 2003 г. я выступил с обширным докладом по своему научному направлению в Московском университете на объединенном заседании двух престижных семинаров – семинаре «Геометрия и физика» кафедры теоретической физики МГУ (руководитель семинара – проф. **Юрий Владимиров**) и Междисциплинарного семинара "Симметрии в науке и искусстве" при Институте машиноведения РАН (руководитель – проф. **Сергей Петухов**). На заседании я представил свою новую книгу **«Новый тип элементарной математики и компьютерной науки, основанных на Золотом Сечении».** Эта книга стала прообразом моей англоязычной книги. Информация об этом семинаре выставлена на Интернете http://www.goldenmuseum.com/20ReportPres_rus.html. В работе семинара принимали участие ведущие московские ученые, специалисты в области теории гармонии и ЗС. Среди них были и мои друзья – композитор и исследователь гармонии **Михаил Марутаев** и доктор физико-математических наук, профессор **Александр Зенкин**. Они пришли на семинар, несмотря на тяжелую болезнь.

С композитором М. А. Марутаевым

С проф. А.А. Зенкиным

Они приняли активное участие в обсуждении моего доклада.

Композитор Марутаев М. А.:

«Прежде всего, я хочу поздравить проф. Стахова с таким прекрасным выступлением, содержащим множество математических открытий, раскрывающих новые, ранее неизвестные стороны чисел Фибоначчи и "Золотого Сечения». Я знаком с проф. Стаховым очень давно; выступал у него на семинаре в Виннице (в двух ролях и как ученый и как композитор), а также в 1984 г. выступал вместе с ним по Киевскому телевидению в передаче "Грани Познания", а в 1989 г. - по Центральному телевидению в передаче "Очевидное - Невероятное". Книга А.П. Стахова "Коды Золотой Пропорции" (1984), подаренная им мне, является моей настольной книгой. Эта книга есть ни что иное, как классика в области теории "Золотого Сечения", а сам проф. Стахов без всякого сомнения по праву может быть причислен к разряду классиков современной науки».

Проф. Зенкин А.А.:

«Я считаю, что проф. Стахов сделал очень интересный, содержательный доклад. Многие его научные достижения в области теории чисел Фибоначчи и их применений (особенно в области компьютерных наук) заслуживают самой высокой оценки. Считаю, что следует всячески поддержать публикацию его новой книги "Новый тип элементарной математики и компьютерной науки, основанных на Золотом Сечении". В целом я поддерживаю предложение академика Шипова о том, что работа проф. Стахова выполнена на уровне работ, выдвигаемых на Нобелевскую Премию. Однако реализации такой задумке помешал сам Нобель, который в своем Завещании исключил математику из перечня наук, по которым может быть присуждена Нобелевская Премия. Работа проф. Стахова содержит глубокие результаты именно в области математики и именно по этой причине не может быть представлена на Нобелевскую премию».

К сожалению, это была моя последняя встреча с моими друзьями. **Александр Александрович Зенкин** ушел из жизни 22 февраля 2006 г., а **Михаил Александрович Марутаев –** 1 февраля 2010 г.

Поддержка ведущих московских ученых еще больше укрепила меня в решимости написать новую книгу по «Математике гармонии».

После переезда в Канаду в 2004 г. я приступил к реализации этой задумки. В 2005 г. произошло несколько важных событий в моей научной жизни. Во-первых, в начале 2005 г. ко мне в Торонто приехал выдающийся американский «золотосеченец» проф. **Скотт Олсен**, который познакомился с моим работами, изучив англоязычную версию моего «Музея Гармонии и Золотого Сечения». В течение дня мы провели очень плодотворную дискуссию по многим проблемам «золотого сечения» и его приложений. Расстались мы друзьями и приняли решение координировать наши исследования в области ЗС и обмениваться информацией.

14 апреля 2005 г. я выступил (на украинском языке) на заседании «Научного Общества имени Шевченко в Канаде» с научно-популярной лекцией на тему **«Всеосяжні принципи гармонії та золотого перетину: математичні звязки в Природі, Науці та Мистецтві».** Лекция была воспринята с восторгом представителями украинской научной диаспоры в Канаде. Большинство выступающих мне настоятельно рекомендовали срочно написать книгу на английском языке и опубликовать ее в Международном издательстве “World Scientific”. После этого выступления я был принят в состав этого научного общества в качестве действительного члена (академика) этого всемирно известного научного общества украинских ученых.

И после этого выступления я начал писать такую книгу. Огромную помощь в подготовке манускрипта книги мне оказали два близких мне человека – моя дочь **Анна Слученкова** и мой американский друг проф. **Скотт Олсен**, который взял на себя безвозмездное редактирование моей англоязычной книги. И моя англоязычная книга была опубликована в сентябре 2009 г. [9]. Эта книга является итогом моих многолетних исследований в этой области, начиная с 1963 г. В своих истоках она восходит к «Началам» Евклида и книге «Божественная пропорция» Луки Пачоли.

На этом я хотел бы закончить несколько затянувшееся повествование, касающееся истории написания моей англоязычной книги [9], и приступить к изложению наиболее ярких научных результатов «математики гармонии», выходящих за пределы **«алгоритмической теории измерения»** и **«систем счисления с иррациональными основаниями»**. Но поскольку эти результаты уже изложены в моих статьях, опубликованных на сайте АТ [11-33], а также в украинских, российских и западных научных журналах и сборниках [34-50], то я, естественно, ограничусь только тезисным изложением сути этих результатов, отсылая читателя к соответствующим публикациям. Главной публикацией, на которой основан материал части 7, является статья [30].

2. «Гипотеза Прокла»: новый взгляд на «Начала» Евклида и историю математики

«Математика гармонии» в своих истоках восходит к «Началам» Евклида. Возникает вопрос, с какой целью Евклид написал свои «Начала»? На первый взгляд, кажется, что ответ на поставленный вопрос очень простой: главная цель Евклида состояла в том, чтобы изложить основные достижения греческой математики за 300 лет, предшествующих Евклиду, используя «аксиоматический метод» изложения материала. Действительно, «Начала» Евклида являются главным трудом древнегреческой науки, посвященным аксиоматическому построению геометрии и математики. Такой взгляд на «Начала» наиболее распространен в современной математике.

Однако, кроме «аксиоматической» точки зрения существует и другая точка зрения на мотивы, которыми руководствовался Евклид при написании «Начал». Эта точка зрения высказана греческим философом и математиком **Проклом Диадохом** (412-485), одним из первых комментаторов «Начал».

Среди математических сочинений Прокла наиболее известным является его *«Комментарий к первой книге «Начал» Евклида»*. В этом *Комментарии* он выдвигает следующую необычную гипотезу, которую называют *гипотезой Прокла*. Суть ее состоит в следующем. Как известно, XIII-я, то есть, заключительная Книга «Начал», посвящена изложению теории пяти правильных многогранников, которые играли главенствующую роль в «Космологии Платона» и в современной науке известны под названием *Платоновых тел*. Именно на это обстоятельство и обращает внимание Прокл. Как подчеркивает **Эдуард Сороко** [51], по мнению Прокла, Евклид *«создавал «Начала» якобы не с целью изложения геометрии как таковой, а чтобы дать полную систематизированную теорию построения пяти «Платоновых тел», попутно осветив некоторые новейшие достижения математики»*.

Насколько мне известно, в российской историко-математической литературе эта гипотеза не обсуждалась. Академик **А.Н. Колмогоров** в своей книге «Математика в ее историческом развитии» (1991) [52] также не счел нужным о ней упомянуть. Однако, это не означает, что ее не существует. Анализ *гипотезы Прокла* содержится во многих западных книгах по истории математики [53-55]. В книге [53] утверждается: *«Согласно Проклу, главная цель «Начал» состояла в том, чтобы изложить построение так называемых Платоновых тел»***.**

В книге [54] эта идея получает дальнейшую конкретизацию: *«Прокл, еще раз упоминая всех предшествующих математиков Платоновского кружка, говорит: "Евклид жил позже, чем математики Платоновского кружка, но раньше, чем Эратосфен и Архимед, ... Он принадлежал к школе Платона и был хорошо знаком с философией Платона и именно поэтому он поставил главной целью своих «Начал» построение так называемых Платоновых тел»*.

Этот комментарий важен для нас тем, что в нем обращается внимание на связь Евклида с Платоном. Евклид полностью разделял философию Платона и его космологию, основанную на *Платоновых телах*; именно поэтому он и поставил главной целью своих «Элементов» создание геометрической теории *Платоновых тел*.

Огромное влияние «Начала» Евклида и «гипотеза Прокла» оказали на Иоганна Кеплера. **Craig Smorinsky** в книге [55] обсуждает влияние идей Платона и Евклида на Иоганна Кеплера: «*Кеплеровский проект в Mysterium Cosmographicum состоял в том, чтобы дать "истинные и совершенные причины для чисел, величин и периодических движений небесных орбит". Совершенные причины должны основываться на простых принципах математического порядка, который Кеплер нашел в Солнечной системе, используя многочисленные геометрические демонстрации. Общая схема его модели была взята Кеплером из Платоновского Тимея, но математические соотношения для Платоновых тел (пирамида, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) были взяты Кеплером из трудов Евклида и Птолемея.* ***При этом Кеплер следовал Проклу в том, что "главная цель Евклида состояла в том, чтобы построить геометрическую теорию так называемых Платоновых тел".***

Кеплер полностью был очарован Проклом, которого он часто цитирует и называет «пифагорейцем».

Анализу «гипотезы Прокла» посвящены мои публикации [29,30,49]. Любопытна история статьи [49], опубликованной в канадско-американском математическом сборнике “Congressus Numerantium”. Я отослал эту статью в канадский математический журнал “Arc Combinatoria”. Через некоторое время мне сообщили, что статья не может быть опубликована из-за ее большого объема (свыше 40 страниц). Но буквально на следующий день я получил из редакции предложение опубликовать ее в математическом сборнике “Congressus Numerantium”. Буквально через 2 месяца я получил бумажные оттиски этой статьи – и это самая быстрая моя публикация в журнальном варианте. Об интересе канадских математиков к статье свидетельствует и тот факт, что статья открывает 193-й выпуск этого сборника за 2008 г.

Значение «гипотезы Прокла» для развития математики состоит в том, что она переворачивает наши представления о «Началах» Евклида – исходном математическом сочинении, из которого берет начало современная математика и математическое образование. «Гипотеза Прокла» утверждает, что «Начала» Евклида создавались под мощным влиянием «гармонических идей» Пифагора и Платона. Эта гипотеза также объяснят, с какой целью Евклид уже в Книге II ввел «задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотое сечение), которое затем широко встречается и в других Книгах «Начал», в частности, в Книге XIII, в которой с использованием «золотого сечения» Евклид развивает геометрическую теорию «Платоновых тел», в частности, «додекаэдра». **Таким образом, «Начала» Евклида можно рассматривать как исторически первую «математическую теорию Гармонии Мироздания», которая ассоциировалась у древних греков с Платоновыми телами и «золотым сечением».**

«Гипотеза Прокла» приводит нас также к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, что **параллельно с «классической математикой», которая позаимствовала в «Началах» Евклида аксиоматический подход, теорию чисел и теорию иррациональностей, в науке, начиная с древних греков, развивалось еще одно математическое направление – «математика гармонии», которая, как и классическая математика, восходит к «Началам» Евклида, но акцентирует свое внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотом сечении») и на теории правильных многогранников, изложенной в XIII-й книге «Начал» Евклида.** И в развитие «математики гармонии» большой вклад внесли выдающиеся мыслители, ученые и математики: **Пифагор, Платон, Евклид, Фибоначчи, Пачоли, Кеплер, Кассини, Бине, Люка, Клейн**, а в 20-м веке – известные математики **Воробьев, Хоггатт и Вайда**.

Восстановление «гипотезы Прокла», которая умышленно замалчивалась современными российскими историками математики, приводит к восстановлению истинной истории математической науки. Она приводит к восстановлению «гармонических идей» пифагорейской математики в истории математики и к совершенно новой трактовке курса математики, излагаемого в средней школе, колледжах и университетах.

Настала пора объединить «классическую математику» и «математику гармонии». И, возможно, это приведет также к преодолению кризиса в современной математики и ее сближению с теоретическим естествознанием и к созданию математики, лишенной противоречий. В этом и состоит главная задача книги [9].

3. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка: расширение «теории чисел Фибоначчи» на непрерывную область

Среди огромного количества различных функциональных зависимостей в математике выделяется особый класс функций, называемых **элементарными функциями**. Значение этих функций для науки состоит в том, что они выражают некоторые устойчивые отношения, встречающиеся в окружающем нас мире. Примерами элементарных функций являются: *степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, гиперболические функции* и т.д. Такими же «элементарными» геометрическими объектами являются «конические сечения» Аполлония *(эллипс, парабола и гипербола)*, которые описываются алгебраическими уравнениями второй степени.

Заметим, что в русском языке слово «элементарный» воспринимается как нечто очень простое, «школьное», недостойное внимания серьезного исследователя. В английском языке слово "elementary" означает **первоначальное, первичное, фундаментальное.** Такой смысл это слово имеет, когда мы говорим Euclid's "Elements" («Начала» Евклида) или "elementary particles" (элементарные частицы). Поэтому словосочетание «элементарные функции» необходимо понимать не как «простые», «школьные» функции, а как первичные, фундаментальные, основополагающие функции, то есть, функции, широко проявляющиеся в природе. Именно эти функции связывают математику с теоретическим естествознанием. Широчайшее использование этих функций при моделировании явлений природы подтверждает из фундаментальный характер.

Открытие новых видов «элементарных функций» всегда было «прорывом» в математической науке. Таким «прорывом», несомненно, стало введение *гиперболических функций*:

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\quad \mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \tag{1}$$

Считается, что гиперболические функции были введены итальянским математиком **Винченцо Риккати** (Vincenzo Riccati) в 1757 году. Он получил их из рассмотрения единичной гиперболы. Напомним, что *гипербола* является одной из важнейших «элементарных функций», которая наряду с *эллипсом* и *параболой* была открыта Аполлонием при исследовании *конических сечений*. В математике гипербола определяется как коническое сечение с эксцентриситетом, большим единицы.

Гипербола лежит в основе *гиперболоида* - это вид поверхности второго порядка в трёхмерном пространстве. Гиперболоид получил широкое распространение в современной науке, технике и искусстве, в частности, архитектуре. Например, свойство двуполостного гиперболоида вращения отражать лучи, направленные в один из фокусов, в другой фокус, используется в *телескопах системы Кассегрена* и в *антеннах Кассегрена*. В архитектуре широко известны следующие конструкции, в основе которых лежит *гиперболоид*: *Шуховская башня, телебашня Гуанчжоу, сиднейская телебашня* и другие уникальные архитектурные сооружения.

Винченцо Риккати первым ввел обозначения sh и ch. Дальнейшее исследование свойств гиперболических функций было проведено **Ламбертом**. Однако интерес к гиперболическим функциям в математике резко повысился в 19 в., когда российский математик **Николай Лобачевский** разработал новый вид геометрии, основанной на *гиперболических функциях* и поэтому названной *гиперболической геометрией.* По мнению А.Н. Колмогорова именно с введения *гиперболической геометрии* начинается современный этап в развитии математики.

В конце 20 в. и начале 21 в. был открыт новый класс гиперболических функций – *гиперболические функции Фибоначчи и Люка* [34,40]. История их открытия такова. В 19 в. французский математик **Жак Филлип Мари Бине** (1786-1856) вывел интересные формулы, которые позволяют выразить числа Фибоначчи и Люка через «золотую пропорцию» Φ:

$$L_n=\begin{cases}\Phi^n+\Phi^{-n} & \text{для}\quad n=2k;\\ \Phi^n-\Phi^{-n} & \text{для}\quad n=2k+1\end{cases} \tag{2}$$

$$F_n=\begin{cases}\dfrac{\Phi^n+\Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для}\quad n=2k+1;\\[2ex] \dfrac{\Phi^n-\Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для}\quad n=2k\end{cases} \tag{3}$$

Справедливости ради необходимо заметить, что формулы (2), (3) были выведены **Абрахамом де Муавром** (1667-1754) и **Николаем Бернулли** (1687-1759) на одно столетие раньше **Жака Бине**. Однако в современной математической литературе формулы (2), (3) называются *формулами Бине*.

Обычно в математике используется представление *формул Бине* в виде, несколько отличающемся от (2), (3). Впервые представление этих формул в виде (2), (3) было использовано мною в книге [3]. Но именно в таком виде четко прослеживается «гиперболический характер» чисел Фибоначчи и Люка, потому что формулы Бине, представленные в виде (2), (3), оказываются подобными по своему виду формулам (1), задающим классические гиперболические функции. Вот эта аналогия и лежит в основе нового класса гиперболических функций, названных *гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка (ГФФЛ)*. Впервые к новому классу гиперболических функций, основанных на *формулах Бине*, пришли украинские математики **Алексей Стахов** и **Иван Ткаченко** в конце 80-х годов 20-го столетия. Первая статья с описанием этого математического результата была опубликована в виде препринта в 1988 г. В 1993 г. в журнале «Доклады Академии наук Украины» была опубликована статья **Алексея Стахова** и **Ивана Ткаченко** *«Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи»* [34] и благодаря этой публикации научный мир узнал о новом классе гиперболических функций. В настоящее время этот результат кажется слишком простым с математической точки зрения. Тем не менее не следует забывать, что *формулы Бине* существовали в математике, по меньшей мере, не меньше двух столетий. И никому из математиков не пришла в голову мысль, что за этим скрывается новый класс гиперболических функций. Именно с таких позиций необходимо оценивать статью [34], рекомендованную для публикации академиком Юрием Митропольским. Поэтому попытки некоторых «исследователей» доказывать, что ничего нового в этих функциях нет и что они были открыты в работах Бине и Бернулли, ничего, кроме удивления, не вызывают.

Теория ГФФЛ получила дальнейшее развитие в статьях **Алексея Стахова** и **Бориса Розина**, опубликованных в международном журнале “Chaos, Solitons & Fractals” [40] и международном электроннном журнале «Visual Mathematics” [47]. В этих статьях введены так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка.*

Симметричный гиперболический синус Фибоначчи

$$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{4}$$

Симметричный гиперболический косинус Фибоначчи

$$cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{5}$$

Симметричный гиперболический синус Люка

$$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x} \tag{6}$$

Симметричный гиперболический косинус Люка

$$cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x} \tag{7}$$

Следует отметить, что числа Фибоначчи F_n и числа Люка L_n тесно связанными с ГФФЛ (4)-(7 и тождественно определяются через них следующим образом:

$$F_n = \begin{cases} sFs(n) & \text{при} \quad n = 2k \\ cFs(n) & \text{при} \quad n = 2k+1 \end{cases}; \qquad L_n = \begin{cases} cLs(n) & \text{при} \quad n = 2k \\ sLs(n) & \text{при} \quad n = 2k+1 \end{cases} \tag{8}$$

По существу ГФФЛ являются расширением *чисел Фибоначчи и Люка* на непрерывную область, при этом, согласно (8), числа Фибоначчи и Люка совпадают с ГФФЛ в дискретных точках непрерывного аргумента $x = n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. **Поэтому введение ГФФЛ знаменует новый (непрерывный) этап в развитии «теории чисел Фибоначчи» [57,58]. При этом дискретная по своей природе «теория чисел Фибоначчи» как бы «вырождается» и превращается в частный случай непрерывной по своей природе теории ГФФЛ.** Заметим, что все дискретные тождества для чисел Фибоначчи и Люка могут быть получены из соответсвующих тождеств для ГФФЛ путем простой замены непрерывной переменной x ее дискретными значениями $x = n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ и наоборот. Рассмотрим в качестве примера знаменитую *формулу Кассини*, связывающую соседние числа Фибоначчи:

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}. \tag{9}$$

Доказано [40], что «дискретному» тождеству (9) соответствует два тождества для симметричных гиперболических функций Фибоначчи (4),(5):

$$\left[sFs(x)\right]^2 - cFs(x+1)cF(x-1) = -1; \quad \left[cFs(x)\right]^2 - sFs(x+1)sF(x-1) = 1. \tag{10}$$

Любопытно отметить реакцию западной науки на статью [40]. Эта статья, написанная в соавторстве с Борисом Розиным, является наиболее цитируемой из моих 15 публикаций в журнале “Chaos, Solitons and Fractals”. Ее индекс цитирования равен 59, то есть, в 59 публикациях имеется ссылка на эту статью. В качестве примера эффективного использования ГФФЛ можно привести статью ученых из Сербии и Хорватии (**Ilija Tanackov, Jovan Tepic, Milan Kostelac**), опубликованную на сайте АТ [56].

Пожалуй, наиболее важным доказательством эффективного применения ГФФЛ (4)-(7) в теоретическом естествознании является новая геометрическая теория филлотаксиса, созданная украинским архитектором **Олегом Боднаром** [59]. В этой связи уместно также упомянуть о новой статье Олега Боднара [60], в которой проведена аналогия между теорией относительности Эйнштейна, основанной на классических гиперболических функциях (в трактовке Минковского), и «геометрией Боднара» [59], основанной на гиперболических функциях Фибоначчи (4)-(5).

4. Формулы Газале, «золотая» гониометрия, решение 4-й проблемы Гильберта и новые задачи для теоретического естествознания

4.1. *Металлические пропорции*

Как известно, «золотая пропорция» является положительным корнем простейшего алгебраического уравнения:

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{10}$$

В конце 20 в. – начале 21 в. ряд исследователей обратили внимание на корни более сложного квадратного уравнения:

$$x^2 - \lambda x - q = 0 \tag{11}$$

или

$$x^2 - \lambda x - 1 = 0. \tag{12}$$

Исследование корней этих уравнений, прежде всего уравнения (12), привели к введению так называемых «металлических пропорций» или «T_m-гармоний». Эти исследования были выполнены практически одновременно и независимо друг от друга **Верой Шпинадель** [61], **Александром Татаренко** [62], **Мидхатом Газале** [63], **Джеем Каппраффом** [64] и др.), что привело к открытию нового класса математических констант, задаваемых следующим математическим выражением:

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}, \tag{13}$$

где $\lambda > 0$ - заданное действительное число.

Аргентинский математик Вера Шпинадель назвала математические константы (13) *металлическими пропорциями* [61].

Заметим, что при $\lambda = 1$ формула (13) сводится к формуле

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{14}$$

задающую «золотую пропорцию».

Однако, в последнее время обнаружилось, что еще в 1997 г. к этим математическим константам пришел **Виктор Шенягин** [65], а еще раньше (1989) к этому же результату пришел

Грант Аракелян [66,67]. Заметим, что «металлические пропорции» привлекли в последние годы физиков-теоретиков [68,69].

4.2. *Формулы Газале*

Я начал интересоваться «металлическими пропорциями» после ознакомления с работами **Веры Шпинадель** [61], **Мидхата Газале** [63] и **Джея Каппраффа**, который прислал мне свою книгу [64]. В своей книге «Гномон. От фараонов до фракталов», опубликованной в 1999 г. и переведенной на русский язык в 2002 г. [63], Газале вывел следующую замечательную формулу, которая задает аналитически обобщенные числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ в диапазоне значений n = 0, ± 1, ± 2, ± 3,...:

$$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}} \tag{15}$$

Следует отметить, что выведенная формула задает бесконечное количество новых рекуррентных последовательностей, подобных числам Фибоначчи, так как каждому $\lambda > 0$ соответствует своя числовая последовательность. Некоторые из них приведены в таблице ниже:

Таблица 1. λ-числа Фибоначчи (λ=1, 2, 3, 4)

λ	Φ_λ / n	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	5	–3	2	–1	1	0	1	1	2	3	5
2	$1+\sqrt{2}$	29	–12	5	–2	1	0	1	2	5	12	29
3	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	109	–33	10	–3	1	0	1	3	10	33	109
4	$2+\sqrt{5}$	305	–72	17	–4	1	0	1	4	17	72	305

Заметим, что второй ряд этой таблицы ($\lambda = 1$) задает классические числа Фибоначчи, в то время как третий ряд ($\lambda = 2$) задает еще один замечательный числовой ряд, известный под названием *числа Пелли*.

Формула (15) по праву может быть отнесена к разряду выдающихся математических формул наряду с *формулами Эйлера*, *формулами Муавра*, *формулами Бине* и т.д. В работе [14] я назвал эту формулу *формулой Газале*.

Именно *формула Газале* (15) вдохновила меня на получение следующих новых математических результатов, основанных на «металлических пропорциях» [14]:

1. Выведена следующая формула:

$$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n} \tag{16}$$

Числовые последовательности, порождаемые (16), я назвал λ-*числами Люка* [14]. Таким образом, обобщенные числа Люка (λ-числа Люка), задаваемые (16), впервые были введены в 2006 г. [14]. Попытка некоторых современных «золотосеченцев» присвоить себе вывод формулы (16) (или ее незначительной модификации) является нарушением ном научной этики.

Формулу (16) я назвал в работе [14] *формулой Газале для* λ-*чисел Люка* в честь Мидхата Газале, который впервые вывел формулу (15). Заметим, что формула (16) задает бесконечное количество новых рекуррентных последовательностей, частными случаями которых являются классические *числа Люка* ($\lambda = 1$) и *числа Пелли-Люка* ($\lambda = 2$). Некоторые из этих числовых последовательностей приведены в Табл. 2.

Таблица 2. λ**-числа Люка (**λ**=1, 2, 3, 4)**

λ	Φ_λ / n	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	–11	7	–4	3	–1	2	1	3	4	7	11
2	$1+\sqrt{2}$	–82	34	–14	6	–2	2	2	6	14	34	82
3	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	–393	119	–36	11	–3	2	3	11	36	119	393
4	$2+\sqrt{5}$	–1364	322	–76	18	–4	2	4	18	76	322	1364

2. Следующим научным результатом, полученным в [14], является введение нового класса гиперболических функций Фибоначчи и Люка, основанных на *формулах Газале* (15), (16):

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Фибоначчи

$$sF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right], \quad (17)$$

$$cF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right]. \quad (18)$$

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Люка

$$sL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \quad (19)$$

$$cL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \quad (20)$$

где x – непрерывная переменная и $\lambda>0$ - заданное действительное число.

Заметим, что количество новых гиперболических функций, задаваемых (17)-(20), теоретически бесконечно; их столько же, сколько существует действительных чисел $\lambda>0$.

Заметим, что для случая $\lambda=1$ гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка (17)-(20) сводятся к симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка (4)-(7), введённым в работе [40].

5. Матрицы Фибоначчи и «золотые» матрицы

5.1. *Q*-матрица Фибоначчи

Во второй половине 20-го века теория чисел Фибоначчи дополнилась важным математическим понятием – понятием *Q-матрицы Фибоначчи* [58]. Речь идет о квадратной матрице следующего типа:

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \quad (21)$$

Вычисление детерминанта этой матрицы приводит к следующему результату:

$$\det Q=1\cdot 0-1\cdot 1=-1, \quad (22)$$

то есть, *Q*-матрица Фибоначчи (21) является невырожденной.

Q-матрица (21) обладает следующим важным свойством:

$$Q^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}, \quad (23)$$

где F_{n-1}, F_n, F_{n+1} – числа Фибоначчи.

Это означает, что при возведении в степень Q-матрица (21) обнаруживает связь с числами Фибоначчи.

Вычислим теперь детерминант матрицы (23). Основываясь на известных свойствах квадратных матриц и учитывая соотношение (22), мы можем записать:

$$\det\left(Q^n\right) = \left(\det Q\right)^n = (-1)^n \tag{24}$$

С другой стороны, непосредственным вычислением детерминанта матрицы (23) мы получаем:

$$\det\left(Q^n\right) = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2. \tag{25}$$

Объединяя результаты (24) и (25), мы получаем следующее выражение для детерминанта матрицы (23):

$$\det\left(Q^n\right) = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{26}$$

Выше при изучении свойств чисел Фибоначчи мы ввели так называемую *формулу Кассини* (9), которую можно записать также в следующем виде:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{27}$$

Сравнивая формулу Кассини (27) с выражением (26), мы приходим к неожиданному заключению: **детерминант Q-матрицы Фибоначчи (23) совпадает с формулой Кассини**!

В Табл. 3 приведены «прямые» (положительное n) и «обратные» (отрицательное n) Q-матрицы Фибоначчи (21) для начальных значений n.

Таблица 3. «Прямые» и «обратные» Q-матрицы Фибоначчи

n	0	1	2	3	4	5
Q^n	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8 & 5\\ 5 & 3\end{pmatrix}$
Q^{-n}	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 5 & -8\end{pmatrix}$

Сопоставляя «прямые» и «обратные» Q-матрицы Фибоначчи, приведенные в Табл.3, легко найти выражения для «обратных» матриц:

$$Q^{-n} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{pmatrix},\ n = 2k \tag{28}$$

$$Q^{-n} = \begin{pmatrix} -F_{n-1} & F_n \\ F_n & -F_{n+1} \end{pmatrix},\ n = 2k+1. \tag{29}$$

5.2. «Золотые» матрицы

«Золотые» матрицы, к которым я пришел в 2007 г. [46], являются своеобразным синтезом гиперболических функций Фибоначчи (4), (5) и Q-матрицы (23), теория которой разработана американским математиком Вернером Хоггаттом [58]. Но если учесть, что в основе гиперболических функций Фибоначчи (4), (5) лежат *формулы Бине* (3), выведенные еще в 19-м веке (и даже раньше, если вспомнить работы Бернулли), то можно сказать, что «золотые» матрицы являются итогом почти 200-летнего периода в развитии «теории чисел Фибоначчи», начиная от французского математика 19-го века Бине и заканчивая 21-м веком.

Для вывода выражений для «золотых» матриц представим формулу (23), задающую n-ю степень Q-матрицы, в виде двух формул для четных (n=2k) и нечетных (n=2k+1) значений n:

$$Q^{2k} = \begin{pmatrix} F_{2k+1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k-1} \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$Q^{2k+1}=\begin{pmatrix} F_{2k+2} & F_{2k+1} \\ F_{2k+1} & F_{2k} \end{pmatrix} \tag{31}$$

Используя соотношение (8), мы можем выразить выражения (30), (31) в терминах симметричных гиперболических функций Фибоначчи:

$$Q^{2k}=\begin{pmatrix} cFs(2k+1) & sFs(2k) \\ sFs(2k) & cFs(2k-1) \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$Q^{2k+1}=\begin{pmatrix} sFs(2k+2) & cFs(2k+1) \\ cFs(2k+1) & sFs(2k) \end{pmatrix} \tag{33}$$

где k – дискретная переменная, k=0, ± 1, ± 2, ± 3, ….

Если теперь заменить дискретную переменную k в матрицах (32), (33) на непрерывную переменную x, тогда мы придем к двум необычным матрицам, которые являются функциями непрерывной переменной x:

$$Q_0(x)=\begin{pmatrix} cFs(2x+1) & sFs(2x) \\ sFs(2x) & cFs(2x-1) \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$Q_1(x)=\begin{pmatrix} sFs(2x+2) & cFs(2x+1) \\ cFs(2x+1) & sFs(2x) \end{pmatrix} \tag{35}$$

При этом элементами матриц (34), (35) являются гиперболические функции Фибоначчи, задаваемые (4), (5).

Если теперь мы вычислим детерминанты «золотых» матриц (34), (35), то используя тождества (10), мы придем к следующим необычным тождествам:

$$\det Q_0(x)=1 \tag{36}$$

$$\det Q_1(x)=-1 \tag{37}$$

Это означает, что детерминанты «золотых» матриц (25), (26) не зависят от значения переменной x, то есть, для любого значения x детерминант матрицы (25) тождественно равен (+1), а детерминант матрицы (26) тождественно равен (-1). Ясно, что результат (27), (28) производит некоторое «магическое» впечатление! Этот результат полностью удовлетворяет «принципу математической красоты Дирака»!

5.3. Q_p-матрицы Фибоначчи

Из книги [58] основателя Фибоначчи-ассоциации **Вернера Хоггатта** я был знаком с теорией Q-матрицы Фибоначчи. Однако после Фибоначчи-конференции (Австрия, Грац, 1996 г.) мой интерес к этому направлению значительно возрос. На Фибоначчи-конференции я познакомился с известным математиком-фибоначчистом **Marjorie Bicknell-Johnson**, ученицей и сподвижницей Вернера Хоггатта. Она прислала мне несколько наиболее важных статей по этой проблематике и всю библиографию по Q-матрицам, и я увлекся этой проблемой.

Моя идея состояла в следующем. Еще в 1966 г. совместно с Игорем Витенько мы пришли к новым числовым последовательностям, названным *обобщенными числами Фибоначчи* или *p-числами Фибоначчи*. При заданном целом p=0, 1, 2, 3,... эти числовые последовательности задаются следующей рекуррентной формулой:

$$F_p(n+1) = F_p(n)+F_p(n-p) \tag{38}$$

при следующих начальных условиях:

$$F_p(1) = F_p(2) =... = F_p(p+1) = 1 \tag{39}$$

Ясно, что формулы (38), (39) задают более общий класс рекуррентных числовых последовательностей, чем классические числа Фибоначчи. Но если Q-матрицы (21), (23) соответствуют классическим числам Фибоначчи, то возникает вопрос: нельзя ли придумать матрицы подобного типа, соответствующие p-числам Фибоначчи, задаваемым (38), (39). После Фибоначчи-конференции (1996 г.) я начал размышлять над этим вопросом. В одну из душных ночей жаркой ливийской осени 1996 г. (я в то время работал профессором кафедры компьютерной техники Университета Аль Фатех, Триполи, Ливия) я проснулся с готовым решением. Перед моими глазами возникла матрица следующего вида:

$$Q_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (40)$$

Такую матрицу я назвал Q_p-*матрицей Фибоначчи*, где p=0, 1, 2, 3, …. А теперь я призываю читателя вместе со мной насладиться удивительными свойствами Q_p-матрицы (40). Прежде всего, исследуем структуру Q_p-матрицы. Легко увидеть, что в общем виде Q_p-матрица представляет собой квадратную матрицу размером $(p+1)\times(p+1)$, где p – заданное целое число, принимающее значение из множества {0, 1, 2, 3, …}. А теперь внимательно посмотрим на Q_p-матрицу (40). Все элементы Q_p-матрицы равны 0 или 1. Мы видим, что она состоит из единичной матрицы размером $p\times p$, окруженной первым столбцом, начинающимся и заканчивающимся 1, и последней строки, начинающейся с 1.

Рассмотрим теперь частные случаи Q_p-матрицы, соответствующие значениям p = 1, 2, 3, 4:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q; \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (41)$$

А теперь сравним между собой две соседние Q_p-матрицы, например, матрицы Q_4 и Q_3. Существует ли между ними какая-то регулярная связь? Очень просто увидеть, что, если в матрице Q_4 вычеркнуть последний, то есть, 5-й столбец и предпоследнюю, т.е. 4-ю, строку, то мы получим матрицу Q_3. Оказывается, что это – общий принцип, связывающий любые две соседние Q_p-матрицы! Действительно, если в матрице Q_3 вычеркнуть последний столбец и предпоследнюю строку, то мы придем к матрице Q_2. Проделав то же самое с матрицей Q_2, то есть, вычеркнув из нее последний столбец и предпоследнюю строку, мы придем к матрице Q_1, которая представляет собой ни что иное, как классическую Q–матрицу, предмет восторга математиков-фибоначчистов [58]. Таким образом, каждая Q_p-матрица содержит в себе все предыдущие матрицы и, с другой стороны, входит в качестве составной части во все последующие матрицы. Конечно, когда я это обнаружил, душа моя наполнилась гордостью от того, что мне удалось придумать такую красивую квадратную матрицу; и я понял, что в моих руках интересный математический результат! И я начал интенсивно исследовать математические свойства матрицы (40), для чего пришлось углубиться в теорию матриц.

Одной из важнейших интегральных характеристик квадратной матрицы, связывающей все ее элементы, является ее *детерминант*. Изучая свойства детерминантов матриц, в одной из книг по теории матриц я нашел ключевой принцип, который позволил мне определить детерминант любой Q_p-матрицы (40). Выше я установил общий принцип, связывающий две соседние матрицы типа (8), например, матрицу Q_p и матрицу Q_{p-1}. Для этого в матрице Q_p надо вычеркнуть последний, то есть, $(p+1)$-й столбец и предпоследнюю, то есть, p-ю строку. Заметим, что сумма $p+1+p = 2p+1$ всегда является нечетным числом независимо от четности числа p. И вот неожиданно я «наткнулся» на одну из общих теорем, задающих удивительно простую связь между детерминантами двух матриц, одна из которых (B) получается из предыдущей (A) путем вычеркивания в матрице A столбца и строки, на пересечении которых стоит «единичный» элемент 1, а остальные элементы вычеркиваемых «кортежей» равны нулю. Оказывается, что при таком вычеркивании детерминант новой матрицы B

отличается от детерминанта исходной матрицы A только знаком, то есть между детерминантами матриц сохраняется следующее соотношение:

$$\det A = -\det B \tag{42}$$

Это и есть тот «ключевой принцип», позволивший мне сразу же определить значение детерминанта для любой матрицы Q_p. Действительно, рассмотрим две соседние матрицы Q_1 и Q_2. Детерминант матрицы Q_1 нам известен: он равен -1. С другой стороны, матрица Q_1 получается из матрицы Q_2 путем вычеркивания 3-го столбца и 2-й строки, причем на их пересечении стоит 1. Но тогда согласно (42) мы легко находим значение детерминанта матрицы Q_2 — он равен (+1). Но тогда, продолжая те же рассуждения для матриц Q_2 и Q_3, мы находим, что детерминант матрицы Q_3 будет равен (-1), а матрицы Q_4 равен (+1) и т.д. Другими словами, для всех матриц Q_p, соответствующих нечетным значениям p (p=1,3,5, …) детерминант матрицы Q_p равен (-1), а для матриц Q_p с четными значениями p (p=0,2,4, …) детерминант равен (+1). Математически этот общий результат можно выразить так:

$$\det Q_p = (-1)^p \; (p = 1,2,3,...) \tag{43}$$

Рассмотрим теперь матрицу Q_p^n, которая является n-й степенью Q_p-матрицы (40) ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$). Я не хотел бы утомлять читателей математическими рассуждениями, которые привели меня к следующему результату [35]:

$$Q_p^n = \begin{pmatrix} F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1) \\ F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p) \end{pmatrix}, \tag{44}$$

Элементами матрицы (44) являются p-числа Фибоначчи, вытекающие из треугольника Паскаля. И этот результат является еще одним «секретом» треугольника Паскаля!

А сейчас мы попытаемся вычислить детерминант матрицы (44). На первый взгляд, кажется, что в общем случае вычисление детерминанта матрицы (44) является чрезвычайно сложной задачей. Но она кажется сложной только для тех, кто не знает свойств квадратных матриц. Действительно, используя эти свойства, мы можем записать:

$$\det Q_p^n = \left(\det Q_p\right)^n \tag{45}$$

Подставляя выражение (43) в (45), мы можем переписать выражение (45) в виде:

$$\det Q_p^n = (-1)^{pn} \tag{46}$$

где p = 1,2,3, …; n = 0,± 1,± 2,± 3, ….

И теперь мы можем выразить наше восхищение по поводу результата (46) и могущества математики! Действительно, невозможно вообразить, что p-числа Фибоначчи, вытекающие из «треугольника Паскаля», могут стать основой нового класса квадратных матриц, задаваемых выражениями (40) и (44). А результат (46) кажется нам абсолютно невероятным! Невозможно вообразить, чтобы для любого заданного p и n детерминант любой матрицы (44) (а число таких матриц бесконечно!) был всегда равен либо (+1), либо (-1), что следует из (46)! Возникает ощущение какой-то магии, какая заключена в матрицах (40) и (44).

Сразу после возвращения из Ливии, где я работал в Университете Аль Фатех (1995-1997), я рассказал о своем новом результате в области теории матриц академику **Ю.А. Митропольскому**, и он сразу же предложил мне опубликовать этот результат в каком-либо академическом журнале Украины. Я подготовил статью «A generalization of the Fibonacci Q-matrix» и по рекомендации Юрия Алексеевича она была опубликована (на английском языке) в «Докладах Академии наук Украины» (1999, №9) [35].

6. Новая теория корректирующих кодов, основанных на матрицах Фибоначчи

Еще один интересный результат был получен мною, когда я работал в Университете Эдуардо Мондлано (Мапуту, Мозамбик, 1998-2000). Речь идет о новой теории кодирования, основанной на *Q*- и Q_p-матрицах Фибоначчи. Для кодирования и декодирования используются матрица Q_p^n, залаваемая (44), и инверсная к ней матрицы Q_p^{-n} в качестве кодирующей и декодирующей матриц. При этом исходное сообщение представляется в виде квадратной матрицы *M* размером $(p+1)\times(p+1)$. «Кодирование» состоит в умножении исходной матрицы *M* на кодирующую матрицу Q_p^n, при этом формируется «кодовая матрица»

$$E = M \times Q_p^n \tag{47}$$

Элементы «кодовой матрицы» (47) вместе с выбранными параметрами *p* и *n* «кодирующей матрицы» Q_p^n направляются в «канал связи». На приемной стороне с использованием параметров *p* и *n* формируется «декодирующая матрица» Q_p^{-n}. «Декодировние» состоит в умножении кодовой матрицы (47) на «декодирующую матрицу» Q_p^{-n}, то есть,

$$E\times Q_p^{-n} = \left(M \times Q_p^n\right)\times Q_p^{-n} = M\times\left(Q_p^n\times Q_p^{-n}\right) = M\times I = M\ , \tag{48}$$

где I - единичная матрица размером $(p+1)\times(p+1)$, которая возникает в результате умножения матриц $Q_p^n\times Q_p^{-n}$. Заметим, что параметры *p* и *n* могут быть заранее известными; в этом случае необходимость в их передаче отпадает.

Между матрицей *M* и *E* существует глубокая математическая связь. Для установления этой связи вычислим детерминант кодовой матрицы (47):

$$\det E = \det\left(M\times Q_p^n\right) = \det M \times \det Q_p^n \tag{49}$$

Используя (46), мы можем записать выражение (49) в следующем виде:

$$\det E = \det M \times (-1)^n \tag{50}$$

Словесно результат (50) можно выразить следующим образом:

Детерминант кодовой матрицы *E* равен дерминанту исходной матрицы *M* , умноженной на коэффициент $(-1)^n$.

А это означает, что мы нашли **КОНТРОЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ**, которое связывает «кодовую матрицу» *E* и исходную матрицу *M*. И мы можем использовать это «контрольное соотношение» для обнаружения и исправления ошибок в «кодовой матрице», если вслед за «кодовой матрицей» *E* мы отправим в «канал связи» детерминант исходной матрицы *M* - $\det M$. Вычисляя на приемной стороне детрминант «кодовой матрицы» *E* - $\det E$ и сравнивая его с $\det M$, мы можем обнаруживать и даже исправлять ощибки в «кодовой матрице» *E*.

Таким образом, эти рассуждения привели нас к новой теории корректирующих кодов, основанной на матриченом подходе. Основы матричной теории корректирующих кодов, основанной на использовании матриц Фибоначчи, описаны в моей статье **Fibonacci matrices, a generalization of the “Cassini formula”, and a new coding theory,** опубликованной в 2006 г. В международном журнале «**Chaos, Solitons & Fractals» [45].** Конечно, эта теория требует детального исследования и тщательного анализа ее эффективности по сравнению с классическими корректирующими кодами, основанными на алгебраичесом подходе.

Литература

1. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977.
2. Арутюнов П.А. Теория и применение алгоритмических измерений. М.: Энергоатомиздат, 1990.
3. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984
4. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г.
5. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
6. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004.
7. С.К. Абачиев, Математика гармонии глазами историка и методолога науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15991, 11.07.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321185.htm
8. С.К. Абачиев, Математика гармонии: от разработки «по горизонтали» к разработке «по вертикали» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16008, 22.07.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321188.htm
9. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey. London. Singapore. Hong Kong: World Scientific, 2009.
10. Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998.
11. Стахов А.П. Математика Гармонии как новое междисциплинарное направление современной науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12371, 19.08.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320001.htm)
12. Стахов А.П. Троичный принцип Брусенцова, система счисления Бергмана и «золотая» троичная зеркально-симметричная арифметика // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12355, 15.08.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02320001.htm)
13. Стахов А.П. «Принцип Золотой Пропорции» в «Началах» Евклида и «Обобщенный Принцип Золотого Сечения» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13523, 06.07.2006 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321051.htm)
14. А.П. Стахов, Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm
15. Стахов А.П. Три «ключевые» проблемы математики на этапе ее зарождения и новые направления в развитии математики, теоретической физики и информатики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14135, 12.01.2007 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321064.htm)
16. Стахов А.П. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка: история и приложения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14429, 31.05.2007 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321057.htm)
17. Стахов А.П. «Стратегические ошибки» в развитии математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14555, 27.08.2007 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321070.htm)
18. Стахов А.П. Роль «Золотого Сечения» и «Математики Гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14688, 12.01.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321074.htm
19. А.П. Стахов, «Математика Гармонии» как новое междисциплинарное направление современной науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14729, 08.03.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321078.htm
20. Стахов А.П. Металлические Пропорции – новые математические константы Природы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14748, 22.03.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321079.htm

21. Стахов А.П. От «Золотого Сечения» к «Металлическим Пропорциям». Генезис великого математического открытия от Евклида к новым математическим константам и новым гиперболическим моделям Природы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14774, 16.04.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321081.htm
22. Стахов А.П., Арансон С.Х. Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm
23. А.П. Стахов, Математика Гармонии как «золотая» парадигма современной науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15599, 15.10.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321168.htm
24. А.П. Стахов, И.Г. Райлян, «Золотая» научная парадигма: этапы большого пути от Пифагора, Платона и Евклида до «Математики Гармонии» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15615, 26.10.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321100.htm
25. А.П. Стахов, Взгляд на «Математику Гармонии» сквозь призму «Элементарной Математики» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16243, 23.12.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321106.htm
26. В.Л. Владимиров, А.П. Стахов, Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16523, 22.05.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321199.htm
27. А.П. Стахов, В.Л. Владимиров, Платоновы тела (их энтропия, рекурсии, симметрия, связь с «золотым сечением», исключительная роль в науке прошлых веков и в современной науке) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16623, 09.07.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321206.htm
28. А.П. Стахов, Микропроцессоры Фибоначчи - как одна из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16759, 16.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321212.htm
29. А.П. Стахов, О «гипотезе Прокла» и противоречии между аксиомами Евдокса-Архимеда и Кантора (комментарий к статье Дениса Клещева) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16769, 20.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321214.htm
30. А.П. Стахов, Математизация гармонии и гармонизация математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16897, 16.10.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/100a/02320066.htm
31. С.К. Абачиев, А.П. Стахов, Числовые фракталы и перспектива качественного углубления математики гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16931, 03.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322018.htm
32. А.П. Стахов, Не стоит ли современная математика на «лженаучном» фундаменте? (В порядке обсуждения статьи Дениса Клещева «Лженаука: болезнь, которую некому лечить») // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17034, 28.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322052.htm
33. А.П. Стахов, «Золотая» гониометрия и теоретическое естествознание // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17136, 22.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322098.htm
34. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993.
35. Stakhov AP. A generalization of the Fibonacci *Q*-matrix. Доклады Академии наук Украины, 1999, №9, с. 46-49.
36. Стахов А.П. Золотое сечение, священная геометрия и математика гармонии. Сборник «Метафизика. Век XXI». Москва: БИНОМ, 2006, с. 174-215

37. Стахов А.П. Математика Гармонии как новое междисциплинарное направление современной науки и ее приложения. Известия Международной Академии наук высшей школы. №2 (36), 2006. – с. 52-64.
38. Стахов А.П. Три «ключевые» проблемы математики на этапе ее зарождения и «Математика Гармонии» как альтернативное направление в развитии математической науки. Totallogy-XXI. Постнекласичні дослідження. №17/18. – Київ: ЦГО НАН України. – 2007. с. 274-323.
39. Stakhov AP. Brousentsov's ternary principle, Bergman's number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic. The Computer Journal 2002, Vol. 45, No. 2: 222-236.
40. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
41. Stakhov A., Rozin B. Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27 (5):** 1162-1177.
42. Stakhov A., Rozin B. The continuous functions for the Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals 2006, **28 (4)**: 1014-1025.
43. Stakhov A. The Generalized Principle of the Golden Section and its applications in mathematics, science, and engineering. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **26 (2)**: 263-289.
44. Stakhov A. Fundamentals of a new kind of Mathematics based on the Golden Section. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27 (5**): 1124-1146.
45. Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the "Cassini formula", and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 30, Issue 1, 56-66.
46. Stakhov A. The "golden" matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons & Fractals 2007, Volume 32, Issue 3, 1138-1146.
47. Stakhov A. Rozin B. The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, Volume 8, No. 3, 2006 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
48. Stakhov A. Three "key" problems of mathematics on the stage of its origin, the "Harmony Mathematics" and its applications in contemporary mathematics, theoretical physics and computer science. Visual Mathematics, Volume 9, No.3, 2007 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm
49. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony: Clarifying the Origins and Development of Mathematics. Congressus Numerantium. 193 (2008), 5-48
50. A. Stakhov, S. Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Applied Mathematics, 2011 (in 3 issues: January, February, March).
51. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984
52. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. Москва: Наука, 1991.
53. Charles H. Kann. Pythagoras and Pythagoreans. A Brief History. Hackett Publishing Co, Inc., 2001.
54. Leonid Zhmud. The origin of the History of Science in Classical Antiquity. Published by Walter de Gruyter, 2006.
55. Craig Smorinsky. History of Mathematics. A Supplement. Springer, 2008
56. Ilija Tanackov, Jovan Tepic, Milan Kostelac, The golden ratio as a new field of artificial intelligence - the proposal and justification // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17129, 20.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322095.htm
57. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва: Наука, 1978 (первое издание, 1961).
58. Hoggat V.E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
59. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994
60. Олег Боднар, Теория относительности и филлотаксис: сходство и различие геометрических интерпретаций // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17097, 12.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322079.htm
61. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004)

62. Татаренко А.А. Золотой Тm-канон антропокосмоса – гармония золотых Тm-Гармоний мира. Рериховский вестник Дона № 11, 1999.
63. Gazale Midhat J**.** Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (русский перевод: Газале М. От фараонов до фракталов / Пер. с англ. А.Р. Логунова. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002).
64. Kappraff Jay. Beyond Measure. A Guided Tour through Nature, Myth, and Number. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002.
65. В.П. Шенягин, «Пифагор, или Каждый создает свой миф» - четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых *s*-пропорциях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17031, 27.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm
66. Грант Аракелян, О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322065.htm
67. Грант Аракелян. Числа и величины в современной физике. Ереван: Изд. АН, 1989.
68. А.О. Майборода, Естественная система единиц Планка и обобщенная формула «золотой пропорции» Татаренко-Шпинадель-Газале // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14814, 02.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321086.htm
69. Косинов Н.В., Золотая пропорция, Золотые константы и Золотые теоремы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14379, 02.05.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321049.htm
70. Harmony of spheres. The Oxford dictionary of philosophy, Oxford University Press, 1994, 1996, 2005
71. Vladimir Dimitrov. A new kind of social science. Study of self-organization of human dynamics. Morrisville Lulu Press, 2005.
72. Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.
73. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
74. Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998.