А.П. Стахов

Конструктивная (алгоритмическая) теория измерения, системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии

Алгебру и Геометрию постигла одна и та же участь. За быстрыми успехами в начале следовали весьма медленные и оставили науку на такой ступени, где она еще далека от совершенства. Это произошло, вероятно, от того, что Математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою.

Николай Лобачевский

Часть 8. Основные математические результаты, приложения и перспективы развития «математики гармонии»

Если рассмотреть историю математики с момента ее зарождения, то, согласно А.Н. Колмогорову, ее развитие стимулировалось практическими потребностями в ***счете****, что привело к открытию позиционного принципа представления чисел (Вавилонская 60-ричная система счисления) и «созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел» (А.Н. Колмогоров), и в* ***измерении,*** *что вызвало «развитие начатков геометрии» (А.Н. Колмогоров) и привело к открытию «несоизмеримых отрезков». Однако, согласно* ***«гипотезе Прокла»****, создание древнегреческой математики, которая лежит в основе современной математики, осуществлялось под мощным влиянием* ***«идеи гармонии»*** *- главной идеи древнегреческой науки. Наиболее ярко это влияние отразилось в «Началах» Евклида, главной целью которых стало создание завершенной геометрической теории* ***Платоновых тел****, выражавших в древнегреческой науке «гармонию Мироздания». В настоящей статье обсуждаются три новые математические теории, которые возникли в современной науке в развитие трех фундаментальных проблем, лежащих в основании математики - счета, измерения и гармонии:* ***алгоритмическая теория измерения****,* ***системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии****. В основе алгоритмической теории измерения (АТИ) лежит абстракция потенциальной бесконечности, то есть, она является* ***конструктивной математической теорией измерения*** *(без аксиомы Кантора). Предметом исследований в АТИ являются оптимальные, то есть, наилучшие в определенном смысле алгоритмы измерения. Основным математическим результатом АТИ является синтез новых, неизвестных ранее алгоритмов измерения, которые порождают новые, неизвестные ранее позиционные системы счисления. Наиболее неожиданными результатами АТИ являются так называемые* ***биномиальные алгоритмы измерения****, основанные на «арифметическом квадрате» (треугольнике Паскаля), и* ***фибоначчиевые алгоритмы измерения,*** *которые привели к открытию новых числовых последовательностей, названных* ***р-числами Фибоначчи****. Фибоначчиевы алгоритмы измерения лежат в основе* ***р-кодов Фибоначчи*** *– новых способов позиционного представления натуральных чисел, которые являются обобщением классической двоичной системы. Эти позиционные представления были положены в основу нового направления в компьютерной науке –* ***компьютеров Фибоначчи*** *(65 патентов США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канады и др. стран).* ***Системы счисления с иррациональными основаниями (коды золотой р-пропорции)*** *являются новыми способами позиционного представления действительных чисел. Они переворачивают наши традиционные представления о системах счисления и могут быть положены в основу* ***«золотой» теории чисел.*** *Наконец,* ***«математика гармонии»,*** *включающая в себя АТИ и коды золотой пропорции, является новым междисциплинарным направлением современной науки, которое может быть положено в основу новой математики, лишенной противоречий.*

Статья состоит из 8 частей:

1. *Роль измерения в развитии науки*
2. *Математическая теория измерения и проблема бесконечности*
3. *Математическая модель измерения. Оптимальные (n,k,0)-алгоритмы и классические позиционные системы счисления*
4. *Биномиальные алгоритмы измерения как источник биномиальных систем счисления*
5. *Задача Баше-Менделеева, принцип асимметрии измерения, фибоначчиевые алгоритмы измерения и p-коды Фибоначчи*
6. *Системы счисления с иррациональными основаниями как основа ««золотой» теории чисел*
7. *Математика гармонии: наиболее яркие страницы*
8. *Основные математические результаты, приложения и перспективы развития «математики гармонии»*

1. Доклад Алексея Стахова “The Golden Section and Harmony Mathematics” на 7-й Международной конференции по числам Фибоначчи и их приложениям (Грац, Австрия, 1996).

16 июля 1996 г. я сделал доклад **“The Golden Section and Harmony Mathematics”** на заседании одной из секций 7-й Международной конференции по числам Фибоначчи и их приложениям» (Грац, Австрия, 1996). Этот доклад затем был опубликован в трудах этой конференции [1]. В этом докладе я дал обширный обзор работ славянских ученых в области «золотого сечения» и чисел Фибоначчи и обратил внимание на новые математические результаты, полученные славянскими учеными в этой области, которые существенно отличаются от работ американских математиков-фибоначчистов. Именно для того, чтобы привлечь внимание к работам славянских ученых-фибоначчистов и подчеркнуть оригинальность этих работ по сравнению с работами американских математиков-фибоначчистов я и ввел термин **«математика гармонии».**

Позже оказалось, что этот термин был использован до меня для обозначения «пифагорейской математики». Впервые этот термин был введен в небольшой статье “Harmony of spheres”, помещенной в **The Oxford dictionary of philosophy** [2]. Проанализируем эту статью.

«Гармония сфер. *В этой доктрине, часто приписываемой Пифагору, происходит объединение математики, музыки и астрономии. Ее сущность состоит в том, что небесные тела, будучи огромными объектами, при своем движении должны производить музыку. Совершенство небесного мира требует, чтобы эта музыка была гармоничной, она скрыта от наших ушей только потому, что всегда присутствует.* ***Математики гармонии была центральным открытием огромного значения для пифагорейцев».***

Таким образом, понятие “the mathematics of harmony” («математика гармонии») в этой статье ассоциируется с **«гармонией сфер»,** которая называлась также **«гармонией мира»** (harmonia mundi) или **мировой музыкой** (лат. musica mundana). Гармония сфер представляет собой античное и средневековое учение о музыкально-математическом устройстве космоса, восходящее к пифагорейской и платонической философской традиции.

Еще одно упоминание о «математике гармонии» мы встречаем в книге **Vladimir Dimitrov. A new kind of social science. Study of self-organization of human dynamics**, опубликованной в 2005 г. [3]. Приведем цитату из этой книги:

«Гармония была ключевой концепцией греков, с помощью которой осуществлялась связь трех значений. Его корневое значение было ***aro****, соединение, гармония было то, что соединяет. Другое значение было пропорция, баланс вещей, который позволял простое соединение. Качество соединения и пропорции позже стали рассматриваться в музыке и других видах искусства.*

Предпосылка для гармонии для греков была выражена во фразе "ничего лишнего". Эта фраза содержала таинственные положительные качества, которые стали объектом исследования лучших умов. Мыслители, такие как Пифагор, стремились раскрыть тайну гармонии как нечто невыразимое и освещенное математикой. ***Математики гармонии, изученная древними греками,***

по-прежнему является вдохновляющей моделью для современных ученых. *Решающее значение для этого имело открытие количественного выражение гармонии, во всем удивительном разнообразии и сложности природы, через золотое сечение Ф (фи):* $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/\,2$ *, что приблизительно равно 1,618. Золотое сечение описано Евклидом в Книге V его «Начал»: "Говорят, что прямая линия, может быть разделена в крайнем и среднем отношении, когда, вся линия так относится к большей части, как большая часть к меньшей".*

Таким образом, в книге [3] понятие "the mathematics of harmony" («математика гармонии») непосредственно ассоциируется с «золотым сечением» - важнейшим математическим открытием античной науки в области гармонии, которое в тот период называлось «делением отрезка в крайнем и среднем отношении».

Когда я писал свою англоязычную книгу **«The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science»** [4], я понял, что я выбрал очень удачное название для моей книги. Оно отражало суть моего научного направления, основанного на «золотом сечении». В своих истоках, это направление, действительно, восходит к математике Пифагора и Платона, наиболее ярким воплощением которой являются знаменитые «Начала» Евклида. Основываясь на «гипотезе Прокла», мне удалось по-новому взглянуть на это знаменитое математическое сочинение [5-8] и показать, что оно писалось под мощным влиянием античной «идеи Гармонии», а его главной целью является создание завершенной геометрической теории *Платоновых тел,* которые выражали «Гармонию» в древнегреческой науке. Для достижения этой цели уже в Книге II Евклид вводит «золотое сечение», которое также встречается и в других Книгах «Начал», в частности, в Книге XIII, посвященной теории *Платоновых тел.*

2. Начало развития «Обобщенной теории золотого сечения-1» как первого этапа в развитии «математики гармонии»

Мое понимание «математики гармонии» изменялось в процессе ее развития. В своем докладе 1996 г. [1], я основывался, прежде всего, на своих математических результатах и результатах моих славянских коллег, полученных до 1996 г. Эти результаты представляют собой обобщение теории ЗС и чисел Фибоначчи. Используя удачное название Гранта Аракеляна, полученные математические результаты уместно назвать «Обобщенной теорией золотого сечения-1». Если классическая теория чисел Фибоначчи, развиваемая математиками-фибоначчистами, основана на классическом ЗС, то «Обобщенная теория золотого сечения-1» основывается на новом математическом понятии – *золотых р-пропорциях.*

К числу новых математических результатов в области «Обобщенной теорией золотого сечения-1», полученных в славянской науке, я отношу следующее:

2.1. ***Алгоритмическая теория измерения (АТИ)***.

Уже в своей первой книге «Введение в алгоритмическую теорию измерения» [9] я четко отмежевался от *аксиомы Кантора*, лежащей в основе классической математической теории измерения. В этой книге я написал: *«В этой связи уместно обратить внимание на внутреннюю противоречивость (в диалектическом смысле) теоретико-множественной теории измерения (и как следствие теории действительных чисел), допускающих в своих исходных положениях (аксиомы непрерывности) сосуществование диалектически противоречивых представлений о бесконечном (актуальной, «статической», завершенной бесконечности – в аксиоме Кантора (и Дедекинда) и бесконечности потенциальной, «становящейся», незавершенной – в аксиоме Кантора»*. Таким образом, при разработке АТИ я четко стал на «конструктивные позиции». Именно «конструктивный подход» привел к созданию весьма необычной математической теории, которой не существовало до сих пор в математике. Следует отметить, что АТИ является прикладной математической теорией, которая возникла из практических задач, возникших в технике аналого-цифрового преобразования. Предметом исследования в АТИ стали *оптимальные алгоритмы измерения.* Их новым классом стали *фибоначчиевые алгоритмы измерения.*

2.2. *Фибоначчиевые алгоритмы измерения.*

Эти алгоритмы измерения оказались одним из наиболее неожиданных результатов АТИ [9]. Они стали источником новых математических понятий и теорий, которые не существовали в математике до АТИ [9]. Это, прежде всего, новый класс рекуррентных числовых последовательностей, названных ***p-числами Фибоначчи*** (p=0,1,2,3,...) на том основании, что их частным случаем являются классические числа Фибоначчи (p=1). При заданном p=0,1,2,3,... p-числа Фибоначчи задаются рекуррентной формулой:

$$F_p(n) = F_p(n-1)+F_p(n-p-1) \quad \text{для} \quad n>p+1 \tag{1}$$

при начальных условиях

$$F_p(1) = F_p(2) = ... = F_p(p+1) = 1. \tag{2}$$

Заметим, что эти последовательности являются весьма необычными числовыми последовательностями. Установлено (**Д.Пойа** и др.), что они выражают некоторые неизвестные ранее свойства *треугольника Паскаля* и могут быть получены из него путем вычисления его *«диагональных сумм».* Это факт (глубокая математическая связь с *треугольником Паскаля*) подчеркивает уникальность новых рекуррентных числовых последовательностей, задаваемых (1), (2).

2.3. *Р-коды Фибоначчи, арифметика Фибоначчи, компьютеры Фибоначчи».*

Фибоначчиевые алгоритмы измерения привели к получению так называемых *р-кодов Фибоначчи* – новых способов двоичного позиционного представления чисел:

$$N = a_nF_p(n) + a_{n-1}F_p(n-1) + ... + a_iF_p(i) + ... + a_1F_p(1), \tag{3}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра i-го разряда позиционного представления (3); n – разрядность кода (3).; $F_p(i)$ – вес i-го разряда, равный i-му p-числу Фибоначчи. Эти коды, в свою очередь, породили *арифметику Фибоначчи* [10], которая стала источником изобретений в области *компьютеров Фибоначчи*, запатентованных за рубежом (США, Япония, Англия, Фракция, ФРГ, Канада и др. страны). Эти патенты сохраняют свою актуальность до настоящего времени в связи с развитием микропроцессорной техники [11].

2.4. *Обобщение задачи о «золотом сечении».*

Одним из главных математических результатов, полученных в процессе развития АТИ [9], является **обобщение задачи о «золотом сечении».** Суть этого обобщения состоит в следующем:

При заданном p=0,1,2,3,... разделить отрезок AB точкой C в следующей пропорции

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p \tag{4}$$

Важно подчеркнуть, что такая формулировка приводит к обобщению сразу двух знаменитых «сечений» - *дихотомии* (p=0) и *классического ЗС* (p=1). Решение задачи (4) сводится к алгебраическому уравнению

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0, \tag{5}$$

которое является обобщением *уравнения «золотой пропорции»*

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{6}$$

соответствующего значению p=1.

Уравнение (5) порождает бесконечное число новых математических констант Φ_p, которые являются положительными корнями уравнения (5). Учитывая тот факт, что при p=1 константа Φ_p сводится к «золотой пропорции», константы Φ_p были названы в [9] *обобщенными золотыми пропорциями* или просто *золотыми p-пропорциями.*

2.5. ***Коды золотой p-пропорции.***

Под этим понимаются следующие новые способы позиционного представления действительных чисел:

$$A = \sum_i a_i \Phi_p^i , \tag{7}$$

где $a_i \in \{0,\ 1\}$ – двоичная цифра, а Φ_p^i вес i-го разряда позиционного представления (7); $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; Φ_p - золотая p-пропорция; p=0,1,2,3,...

Заметим, что при p=0 позиционное представление (7) сводится к классической *двоичной системе,* которая лежит в основе современных компьютеров. При $p > 0$ коды (7) порождают новый класс двоичных позиционных представлений - *системы счисления с иррациональными основаниями,* поскольку при $p > 0$ основанием таких систем счисления являются иррациональные числа Φ_p. При $p = 1$ позиционное представление (7) сводится к *системе счисления с иррациональным основанием* $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, введенной в 1957 г. американским математиком **Джорджем Бергманом** [12].

Заметим, что *коды золотой p-пропорции* (7) были введены мною в 1980 г. [13], а их теория изложена в книге [14]. Коды золотой p-пропорции (7) стали основой для выдвижения концепции «золотой» теории чисел, обоснованной в статье [15].

Существенно подчеркнуть, что **до работы Бергмана [12] систем счисления с иррациональными основаниями в математике не существовало!** Это означает, что системы счисления с иррациональными основаниями (*система Бергмана* [12] и ее обобщение – *коды золотой p-пропорции* [13,14]) можно считать «прорывом» в области систем счисления, которые исторически являются первыми арифметическими результатами (Вавилонская 60-ричная система) и возникли в математике задолго до создания «элементарной теории чисел», описанной в «Началах» Евклида. **И поэтому у нас есть все основания утверждать, что *система Бергмана* [12] и *коды золотой p-пропорции* [13,14] являются важнейшими современными открытиями в области систем счисления, сравнимыми разве что с открытием позиционного принципа представления чисел (Вавилон), а также десятичной и двоичной систем счисления. Системы счисления с иррациональными основаниями, задаваемые (7), переворачивает наши представления о системах счисления; более того - соотношение между рациональными и иррациональными числами. В этих системах на первый план выдвигаются иррациональные числа – *золотые p-пропорции* $\Phi_p\ (p = 1, 2, 3, \ldots)$, которое являются основанием, началом всех чисел, так как с их помощью может быть представлено любое действительное число!**

2.6. ***Закон структурной гармонии систем Эдуарда Сороко***

Пожалуй, самым неожиданным приложением обобщенных золотых пропорций Φ_p оказался *закон структурной гармонии систем Эдуарда Сороко,* сформулированный в его книге [16]. Этот закон гласит:

"Обобщенные золотые сечения суть инварианты, на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоничное строение, стационарный режим существования, структурно-функциональную ... устойчивость".

2.7. ***«Золотые» гиперболические функции и «геометрия Боднара»***

Еще одним новым научным результатом, полученным до 1996 г., является новая геометрическая теория филлотаксиса, созданная украинским архитектором **Олегом Боднаром** [17]. Эта теория основывалась на так называемых «золотых» гиперболических функциях, которые с точностью до постоянного коэффициента совпадают с гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка, введенными в статьях [18,19].

2.8. ***Признание «математики гармонии» математиками-фибоначчистами***

Изложенные выше математические результаты составляли содержание тех новых знаний в области ЗС и чисел Фибоначчи, о которых я рассказал математикам-фибоначчистам в 1996 г. на 7-й Международной конференции по числам Фибоначчи и их приложениям (Грай, Австрия, 15-19 июля 1996 г.). Этим знаниям я присвоил название **«Математика Гармонии».** Используя весьма удачное название Гранта Аракеляна, этот объем знаний можно было бы назвать **«Обобщенной теорией золотого сечения-1».** Эта теория и является первым этапом в развитии «математики гармонии». Важно подчеркнуть, что «Обобщенная теория золотого сечения-1» («математика гармонии») в 1996 г. прошла апробацию на самом высоком международном уровне - Международной конференции Международной конференции по числам Фибоначчи и их приложениям, организованной Фибоначчи Ассоциацией. При этом название «математика гармонии» не вызвало каких-либо замечаний у математиков-фибоначчистов, а мой доклад по рекомендации Фибоначчи Ассоциации был опубликован в трудах указанной конференции [1].

3. Новые результаты «обобщенной теории золотого сечения-1», основанной на золотых *p*-пропорциях

В конце 20 в. и первой декаде 21 в. начался следующий этап в развитии «обобщенной теории золотого сечения-1», основанной на золотых *p*-пропорциях**.** В этот период были получены следующие математические результаты:

3.1. ***Разработка теории симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка***

Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка были введены **Алексеем Стаховым** и **Борисом Розиным** в 2005 г. [18]:

<u>Симметричный гиперболический синус Фибоначчи</u>

$$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{8}$$

<u>Симметричный гиперболический косинус Фибоначчи</u>

$$cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{9}$$

<u>Симметричный гиперболический синус Люка</u>

$$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x} \tag{10}$$

<u>Симметричный гиперболический косинус Люка</u>

$$cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x} \tag{11}$$

Следует отметить, что числа Фибоначчи F_n и числа Люка L_n связанны с ГФФЛ (8)-(11) и тождественно определяются через них следующим образом:

$$F_n = \begin{cases} sFs(n) & \text{при } n = 2k \\ cFs(n) & \text{при } n = 2k+1 \end{cases}; \qquad L_n = \begin{cases} cLs(n) & \text{при } n = 2k \\ sLs(n) & \text{при } n = 2k+1 \end{cases} \tag{12}$$

3.2. ***Золотой Шофар и «шофароподобная» геометрия Вселенной***

В 2005 г. международный журнал “Chaos, Solitons & Fractals” опубликовал статью **Алексея Стахова** и **Бориса Розина** “The Golden Shofar” [20]. Статья посвящена теории функции 2-го порядка, основанной на «золотом сечении». Функция вытекает естественным образом из симметричных гиперболических функций Фибоначчи (8), (9).

Мы не будем останавливаться на выводе выражения для такой функции, отсылая к статье [20], и запишем конечный результат:

$$z^2 = [cFs(x) - y][sFs(x) + y], \tag{13}$$

где $sFs(x)$ и $cFs(x)$ соответственно симметричный гиперболический синус и косинус Фибоначчи, задаваемые (8), (9).

Выражение (13) задает функцию z, зависящую от двух переменных x и y. Такая функция может быть представлена в виде некоторой криволинейной поверхности $z=f(x, y)$ в трехмерном пространстве (Рис. 1).

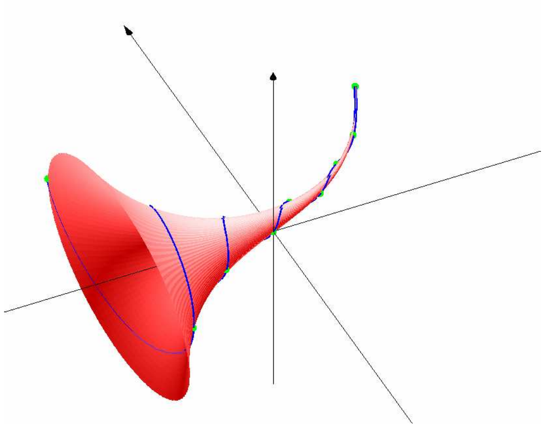

Рисунок 1. Поверхность «Золотой Шофар»

Полученная криволинейная поверхность похожа на рог или воронку с загибающимся вверх узким концом и напоминает по своей форме рог. По предложению Бориса Розина эта поверхность была названа «Золотой Шофар» на том основании, что в переводе с Иврита «Шофар» означает силу, мощь и «Рог, в который трубят в Судный день».

В 2004 г. в весьма авторитетном международном журнале “Classical Quantum Gravity” опубликована сенсационная статья в области космологии. Статья называется “Hyperbolic Universes with a Horned Topology and the CMB Anisotropy» («Гиперболические Вселенная с конической (рогоподобной) топологией и анизотропия реликта» (авторы Ralf Aurich, Sven Lustig, Frank Steiner, Holger Then). Ее популярное изложение дано в статье Максима Борисова [21].

Анализ новейших астрофизических данных, и особенно данных по космическому микроволновому фону (реликтовое излучение), которые являются своего рода «снимком» Вселенной, которой было всего 380 тысяч лет отроду, позволил вывести уравнения, определяющие кривизну и топологию Вселенной в больших масштабах. И эти уравнения привели к сенсационному заключению, что Вселенная может иметь форму рога или горна. Точнее говоря, весь наш космос оказывается вытянут в этакую длинную трубку, с узким концом с одной стороны и «раструбом» с другой (Рис. 2). Такая «конструкция» нашей Вселенной кроме всего прочего подразумевает, что она конечна, а в каких-то ее местах встречаются области, где можно увидеть собственный затылок. Возможно, для «здравомыслящих» людей все это прозвучит как полный бред или мечта сюрреалиста, однако выкладки математика Франка Штайнера из германского Университета Ульма и его коллег основаны на авторитетных экспериментальных данных, полученных в 2003 году знаменитым зондом WMAP (NASA's Wilkinson Microwave Anisotropy Probe).

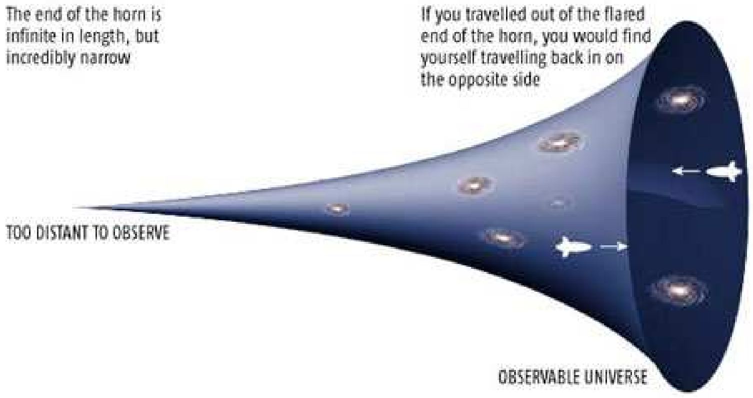

Рисунок 2. Форма Вселенной

Сравнивая Рис. 1 и 2, нетрудно заметить удивительную схожесть поверхности «Золотой Шофар», полученной путем математических исследований, с формой Вселенной, основанной на экспериментальных данных. Отсюда вполне резонной является гипотеза, что **по своей форме Вселенная является «шофароподобной».** Из этой необычной аналогии между «Золотым Шофаром» (Рис.1), основанным на ЗС и гиперболических функциях Фибоначчи, и формой гиперболической Вселенной (Рис.2), к которой немецкие математики пришли на основе анализа экспериментальных данных, в работе [20] выдвинута следующая гипотеза:

Золотое Сечение, и связанные с ним числа Фибоначчи отображают гармонию Вселенной, как единение частей в целом. С другой стороны, рекуррентные последовательности Фибоначчи и Люка порождают новый класс гиперболических функций (8)-(11), обладающих не только всеми свойствами классических гиперболических функций, но и рекуррентными свойствами, подобными свойствам чисел Фибоначчи и Люка. И эти новые функции проявляют себя не только в биологическом мире («Законы филлотаксиса»), но, возможно, на всех уровнях организации материи. Такой синтез гармонии, рекурсии и гиперболических функций, авторы статьи [20] назвали *золотым гиперболическом подходом.* Из проведенного исследования [20] вытекает актуальность использования *золотого гиперболического подхода* для современной физики и космологии

3.3. ***Обобщение формул Бине для p-чисел Фибоначчи***

В работе [22] выведена обобщенная формула Бине для *p-чисел Фибоначчи*, задаваемых рекуррентной формулой (1) при начальных условиях (2). При заданном целом p>0 обобщенная формула Бине принимает следующий вид:

$$F_p(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + \ldots + k_{p+1}(x_{p+1})^n, \qquad (14)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ – корни алгебраического уравнения (5), а $k_1, k_2, \ldots, k_{p+1}$ – некоторые постоянные коэффициенты, которые зависят от начальных членов последовательности *p-чисел Фибоначчи*:

$$F_p(0) = 0, F_p(1) = F_p(2) = \ldots = F_p(p) = 1. \qquad (15)$$

Используя выражения (14) и (15), можно составить следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&F_p(0) = k_1 + k_2 + \ldots + k_{p+1} = 0\\
&F_p(1) = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_{p+1}x_{p+1} = 1\\
&F_p(2) = k_1(x_1)^2 + k_2(x_2)^2 + \ldots + k_{p+1}(x_{p+1})^3 = 1 \qquad (16)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F_p(p) = k_1(x_1)^p + k_2(x_2)^p + \ldots + k_{p+1}(x_{p+1})^p = 1
\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (16), мы получим значения коэффициентов $k_1, k_2, \ldots, k_{p+1}$

3.4. ***Введение p-чисел Люка***

Как известно, p-числа Фибоначчи были введены еще в 70-е годы 20 в. [9]. В статье [22] за аналитической формулой (14), задающей *p-числа Фибоначчи,* введена следующая математическая формула, которая задает новые рекуррентные числовые последовательности, названные *p-числами Люка*:

$$L_p(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + \ldots + (x_{p+1})^n, \qquad (17)$$

где x_1, x_2, …, x_{p+1} – корни алгебраического уравнения (5). Как показано в [22], из формулы (17) вытекает рекуррентная формула

$$L_p(n) = L_p(n-1) + L_p(n-p-1), \qquad (18)$$

и следующие начальные условия

$$L_p(0) = p+1, \qquad (19)$$

$$L_p(1) = L_p(2) = \ldots = L_p(p) = 1. \qquad (20)$$

С помощью формул (18)-(20) для любого заданного целого $p>0$ можно задают *p-числа Люка*.

Важно отметить, что вывод обобщенных формул Бине для *p-чисел Фибоначчи и Люка*, задаваемых выражениями (14) и (17), являются, несомненно, важным шагом в развитии «обобщенной теории золотого сечения-1».

3.5. *Обобщенный принцип «золотого сечения»*

В работах известного российского архитектора и исследователя гармонии **Иосифа Шевелева** исследуются общие принципы построения «гармоничных систем». В книге «Метаязык живой природы» [24] Шевелев исследует так называемый *алгоритм целостности.* Взяв за основу знаменитое изречение Гераклита «Из одного – все, из всего – одно», Шевелев попытался вывести из него наиболее общие принципы, лежащие в основе целостности живой природы.

Шевелев пишет [24]: «*Опыт искусства в целом показал, что в случае, когда восприятие фиксирует совершенство формы, в ней присутствует особого рода математическая симметрия. В структуре целого можно найти элемент, из которого подчиняясь этой симметрии, развертывается размерная и ритмическая структура всех его частей. Основополагающий элемент связывает с собой все части одним числовым законом и правилами его приложения. Тем самым все оказывается неразрывно связано в одно*».

Перенося эту идею на структуры живой природы, Шевелев выбирает «Единицу» или «Монаду» в качестве «первочисла» как символа «целостности» всего сущего и пытается записать «уравнения первоосновы», то есть, тождества, позволяющее выразить «Единицу» в виде суммы простейших элементов, и создать его динамическую модель.

Простейшим принципом деления целого является «принцип дихотомии» (деления пополам), который основывается на следующем тождестве, связывающем «двоичные числа»:

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1}, \qquad (21)$$

где n=0, ±1, ±2, ±3, … .

Для случая n=0 мы можем получить следующее представление «монады»:

$$1 = 2^0 = 2^{-1} + 2^{-1}. \qquad (22)$$

В книге [24] приведена следующая «динамическая» модель «принципа дихотомии»:

$$\begin{aligned}
1 = 2^0 &= 2^{-1} + 2^{-1} \\
2^{-1} &= 2^{-2} + 2^{-2} \\
2^{-2} &= 2^{-3} + 2^{-3} \\
2^{-3} &= 2^{-4} + 2^{-4} \qquad (23) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1 = 2^0 &= 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}
\end{aligned}$$

Эта динамическая модель приводит нас к следующему тождеству, которое Шевелев называет «уравнением первоосновы»:

$$1 = 2^0 = 2^{-1} + 2^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \qquad (24)$$

Таким образом, суть «уравнения первоосновы» (24) состоит в том, что «монада» представляется в виде суммы простейших элементов – степеней числа $2^{-i}, i = 1,2,3,...$.

В основу «уравнения первоосновы» может быть положен также известный из древних времен «принцип золотого сечения», который основывается на следующем тождестве, связывающем степени золотой пропорции $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}, \qquad (25)$$

где n=0, ±1, ±2, ±3, … .

Для случая n=0 мы можем записать:

$$1 = \Phi^0 = \Phi^{-1} + \Phi^{-2} \qquad (26)$$

Используя тождества (25), (26), Шевелев конструирует следующую «динамическую» модель «принципа золотого сечения»:

$$\begin{aligned}
1 = \Phi^0 &= \Phi^{-1} + \Phi^{-2} \\
\Phi^{-2} &= \Phi^{-3} + \Phi^{-4} \\
\Phi^{-4} &= \Phi^{-5} + \Phi^{-6} \\
\Phi^{-6} &= \Phi^{-7} + \Phi^{-8} \qquad (27) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
1 = \Phi^0 = \Phi^{-1} + \Phi^{-3} + \Phi^{-5} &+ \Phi^{-7} + \Phi^{-9} + \Phi^{-11} + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi^{-(2i-1)}
\end{aligned}$$

которая приводит нас еще к одному «уравнению первоосновы»:

$$1 = \Phi^0 = \Phi^{-1} + \Phi^{-2} = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi^{-(2i-1)} \qquad (28)$$

Заметим, что **«принцип дихотомии»**, задаваемый (21)-(24), и **«принцип золотого сечения»**, задаваемый (25)-(28), имеют огромное количество приложений (деление биологических клеток, двоичная система счисления, система счисления Бергмана, численные методы решения алгебраических уравнений и т.д).

По мнению Шевелева [24], «уравнения первоосновы» (24), (28) имеют значение, далеко выходящее за пределы математических приложений. Шевелев утверждает:

«Именно так строит себя живая природа. Все ее объекты возникают по этой схеме. Из одного начального элемента возникает «все», и это «все» создает взаимоскрепленное, взаимно необходимое, непостижимым образом соединенное и не распадающееся на составные части неделимое целое - объект бытия. Так растет из семени дерево, из оплодотворенной клетки – сложнейшие устроенное живое существо; и так же, предположительно, из одного начального состояния, из одного Нечто возникла Вселенная: современная астрофизика, непрерывно совершенствуя модель расширяющейся Вселенной, утверждает, что вещество и энергия в наблюдаемом мире могли возникнуть буквально из ничего».

В работе [25] «уравнения первоосновы» Шевелева обобщаются на основе использования *золотых p-пропорций* $\Phi_p \left(p = 0,1,2,3,... \right)$. Степени золотых p-пропорций связаны ежду собой следующим замечательным тождеством:

$$\Phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \Phi_p^{n-p-1}, \qquad (28)$$

где n=0, ±1, ±2, ±3, … .

При n=0 тождество (28) принимает следующий вид:

$$1=\Phi_p^0=\Phi_p^{-1}+\Phi_p^{-p-1}, \qquad (29)$$

Взяв за основу тождества (28) и (29), можно сконструировать следующую «динамическую» модель разложения «монады» по степеням золотой p-пропорции:

$$\begin{aligned}
&1=\Phi^0=\Phi_p^{-1}+\Phi_p^{-(p+1)}\\
&\qquad\Phi_p^{-(p+1)}=\Phi_p^{-(p+1)-1}+\Phi_p^{-2(p+1)}\\
&\qquad\qquad\Phi_p^{-2(p+1)}=\Phi_p^{-2(p+1)-1}+\Phi_p^{-3(p+1)}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&1=\Phi^0=\Phi_p^{-1}+\Phi_p^{-(p+1)-1}+\Phi_p^{-2(p+1)-1}+\Phi_p^{-3(p+1)-1}+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi_p^{-(i-1)(p+1)-1}
\end{aligned} \qquad (30)$$

Основным результатом работы [25] является получение более общего «уравнения первоосновы»:

$$1=\Phi_p^{-1}+\Phi_p^{-(p+1)}=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi_p^{-(i-1)(p+1)-1}, \qquad (31)$$

которое задает более общий научный принцип – **«обобщенный принцип золотого сечения».**

Ясно, что этот общий принцип содержит в себе в качестве частных случаев **«принцип дихотомии»** (p=0) и **«принцип золотого сечения»** (p=1).

Если опять обратиться к идеям книги Шевелева [24], то мы должны признать, что «уравнение первоосновы», задаваемое (31), возможно, задает нам бесконечное число «гармонических» структур и «законов природы», которые могут быть созданы Природой (или Богом), используя комбинаторные соотношения.

3.6. *Обобщенные матрицы Фибоначчи и новая теория кодирования*

Эти результаты описаны в работах [26,27], а также в части 7 настоящей статьи. Поэтому ограничимся только констатацией факта двух новых результатов в области теории матриц [26] и теории избыточного кодирования [27].

В работе [26] введена так называемая Q_p-*матрица Фибоначчи*:

$$Q_p=\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix} \qquad (32)$$

Она обладает следующими уникальными математическими свойствами:

$$\boxed{\det Q_p=(-1)^p\ \left(p=1,2,3,\ldots\right)} \qquad (33)$$

$$\boxed{Q_p^n=\begin{pmatrix}
F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1)\\
F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1)\\
F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p)
\end{pmatrix}}, \qquad (34)$$

$$\boxed{\det Q_p^n=(-1)^{pn}} \qquad (35)$$

где $p = 1,2,3, \ldots$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

В работе [27] разработана новая теория избыточного кодирования, основанная на матрицах Фибоначчи. Ее суть состоит в умножении исходного сообщения *M*, представленного в матричной форме, на матрицу Q_p^n типа (34) (кодирование) и затем «кодовой матрицы» *E* на инверсную матрицу Q_p^{-n} (декодирование).

4. Развитие «обобщенной теории золотого сечения-2», основанной на «металлических пропорциях»

Эти результаты описаны в части 7 настоящей статьи. Поэтому мы ограничимся только перечислением новых математических результатов **«обобщенной теории золотого сечения-2»:**

4.1. ***«Металлические пропорции».***

Под этим понимается новый класс математических констант, которые задаются следующей формулой:

$$\boxed{\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}}, \qquad (36)$$

где $\lambda > 0$ - заданное действительное число.

Эти константы являются корнями следующего квадратного уравнения:

$$x^2 - \lambda x - 1 = 0. \qquad (37)$$

Исследование корней этих уравнений, прежде всего уравнения (37), привели к введению так называемых «металлических пропорций» (Вера Шпинадель) или «T_m-гармоний» (Александр Татаренко). Эти исследования были выполнены практически одновременно и независимо друг от друга **Верой Шпинадель** [28], **Александром Татаренко** [29], **Мидхатом Газале** [30], **Джеем Каппраффом** [31], **Виктором Шенягиным** [32], **Грантом Аракеляном** [33-35], и другими исследователями. Важно также подчеркнуть, что «металлическим пропорции» (36) привлекли внимание физиков-теоретиков **Александра Майбороды** [36] и **Николая Косинова** [37].

Следует отметить, что главной математической идеей развиваемой в работах Аракеляна [34,35] «обобщенной теория золотого сечения-2» являются «металлические пропорции».

4.2. ***Формулы Газале и новые классы рекуррентных числовых последовательностей***

Речь идет о двух математических формулах:

$$\boxed{F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}} \qquad (38)$$

$$\boxed{L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}} \qquad (39)$$

Формула (38) выведена в книге **Мидхата Газале** [30]. Формула (39) выведена в статье **Алексея Стахова** [38]. Там же введено название *формулы Газале* и отмечено, что эти формулы являются обобщением *формул Бине* ($\lambda = 1$).

Заметим, что *формулы Газале* (38), (39) порождают новые классы рекуррентных числовых последовательностей:

- λ-*числа Фибоначчи,* задаваемые рекуррентной формулой

$$\boxed{F_\lambda(n) = \lambda F_\lambda(n-1) + F_\lambda(n-2);\, F_\lambda(0) = 0, F_\lambda(1) = 1} \qquad (40)$$

- λ-*числа Люка,* задаваемые рекуррентной формулой

$$\boxed{L_\lambda(n)=\lambda L_\lambda(n-1)+L_\lambda(n-2);L_\lambda(0)=2,L_\lambda(1)=\lambda} \tag{41}$$

Заметим, что при $\lambda=1$ рекуррентная формула (41) порождает *числа Люка,* а при $\lambda=2$ - *числа Пелли.* Важно подчеркнуть, что *обобщенные числа Люка* или λ-*числа Люка* впервые введены в 2006 г. в работе [38].

4.3. *«Золотая» гониометрия и решение 4-й проблемы Гильберта*

Основываясь на *формулах Газале,* в работе [38] введены новые классы гиперболических функций – *гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка,* которые являются расширением *формул Газале* (38), (39) на непрерывную область. Эти функции описаны в части 7 настоящей статьи. Важно подчеркнуть, что указанные гиперболические функции являются широким обобщением как *симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка,* введенных в [18], так и классических гиперболических функций. В статье **Алексея Стахова** и **Самуила Арансона** [39] дано оригинальное решение 4-й проблемы Гильберта, основываясь на *гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка.*

4.4. *Новая задача для теоретического естествознания, вытекающая из «золотой» гониометрии*

В статье [40], основываясь на «золотой» гониометрии [38], поставлена следующая задача перед теоретическим естествознанием:

«Геометрия Боднара» [17] и «золотая» гониометрия [38] являются основанием для постановки новой задачи перед теоретическим естествознанием – задачу поиска таких физических, химических, ботанических или биологических явлений Природы, гиперболическая геометрия которых отличается от классической геометрии Лобачевского и соответствует новым λ-геометриям, например, «серебряной», «бронзовой», «медной» и другим λ-геометриям, описанным в работе [39]. При этом можно ожидать, что первые успехи в этом направлении будут связаны с «серебряной» пропорцией $\Phi_2=1+\sqrt{2}$, связанной с *числами Пелли.* По-видимому, эта пропорция представляет особый интерес для теоретического естествознания. По мнению Александра Татаренко, эта пропорция или T_2-гармония *«буквально пронизывает все мироздание, являясь его несущим каркасом – суперфундаментальной константой, не знающей ограничений, свойственных всем без исключения известным физическим константам. Установление факта доминантности T_2-Гармонии, а с ней и особого статуса ее «функции» $\overline{T}_2=\sqrt{2}$ является заключительным аккордом — важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птоломеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника».*

5. Об основных алгебраических уравнениях «математики гармонии»

Как вытекает из проведенного исследования, «математика гармонии» [4] основывается на двух алгебраических уравнениях (5) и (37). Именно это обстоятельство стало предметом критики «математики гармонии» со стороны д.т.н. С.Л. Василенко. В статье [41] Василенко пишет:

«*Все пространство состояний «МГ» сведено, по сути, к двум весьма элементарным в математике моделям:*

$$x^{p+1}=x^p+1;\quad x^2=mx+1\text{».} \tag{42}$$

При этом главная идея статьи [41] состоит в том, что модели (42) есть частный случай «общей теории алгебраических полиномов» и, следовательно, «математика гармонии» есть частный случай «общей теории алгебраических полиномов».

Мой ответ на эту критику С.Л. Василенко содержится в статье [42]. Тот факт, что уравнения (42) являются частным случаем алгебраического полинома n-й степени, не является основанием рассматривать любой алгебраический полином, который является *обобщением* уравнений (42), выразителем *математической гармонии Мироздания*.

На опасность подобного рода *обобщений* указывает **Морис Клайн** в книге [43]. Морис Клайн пишет:

«Назовем несколько направлений, в которых развивается современная чистая математика, - это позволит читателю лучше понять различие между чисто математическими и прикладными проблемами. Одно из таких направлений – ***абстракция****. После того, как Гамильтон ввел квартернионы, которые он намеревался применить к решению физических проблем, другие математики поняли возможность существования не одной, а многих алгебр и занялись поиском всех возможных алгебр,* ***не задумываясь над тем, насколько они применимы к описанию реального мира.*** *Это направление математической деятельности процветает и поныне, оно является одним из направлений абстрактной алгебры.*

Другое направление чистой математики - ***обобщение****. Конические сечения (эллипс, парабола и гипербола) описываются алгебраическими уравнениями второй степени. В приложениях встречаются также кривые, описываемые уравнениями третьей степени. Обобщение позволяет перепрыгнуть сразу к кривым, описываемыми алгебраическими уравнениями n-й степени, и подробно изучить их свойства,* ***хотя такие кривые вряд ли могут помочь нам при описании явлений природы.***

Обобщение и абстракция, предпринятые с единственной целью – написать очередную статью для отчета, как правило, не представляют ценности с точки зрения приложений. Подавляющее большинство работ такого рода посвящено переформулированию на более общем и абстрактном языке с использованием новой терминологии того, что было известно и раньше, но излагалось на более простом и частном языке. Что касается приложений математики, то здесь такая переформулировка не дает ни более мощного метода, ни более глубокого понимания. ***Распространение новомодной формулировки, как правило, искусственной и не связанной с какими-либо физическими идеями, хотя и направленной якобы на модернизацию идей, заведомо не способствует более эффективному применению математики, а, наоборот, затрудняет его. Это - новый язык, а не новая математика».***

Я считаю, что с учетом этого высказывания **Мориса Клайна** предложение **С.Л. Василенко** свести «математику гармонии» к «общей теории алгебраических полиномов» не выдерживает никакой критики. Предложение Василенко является **призывом к «обобщениям», которые уводят нас от физических приложений.**

Почему современные «золотосеченцы» (**Стахов, Сороко, Татаренко, Шпинадель, Газале, Каппрафф, Аракелян, Шенягин, Косинов, Майборода, Ткаченко, Розин** и др.) избрали уравнения (1) в качестве объектов своих исследований? Дело в том, что они увидели, что именно эти модели являются **естественными обобщениями** простейшего алгебраического уравнения:

$$x^2 = x + 1,$$

которое порождает красивейший математический результат, когда-либо полученный в математике - «золотую пропорцию»

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Изучение моделей, основанных на (42), – это очень осторожный и взвешенный шаг в расширении наших представлений о новых моделях гармонии Мироздания. Каждое из обобщений, задаваемых (42), сохраняет существенные свойства «золотого сечения».

В частности, золотая p-пропорция Φ_p сохраняет два важнейших математических свойства классической «золотой пропорции» - *аддитивность и мультипликативность*

$$\Phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \Phi_p^{n-p-1} = \Phi_p \times \Phi_p^{n-1} \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots). \tag{43}$$

Частными случаями тождества (43) являются два замечательных тождества для «двоичных чисел» (p=0) и для классической «золотой пропорции» (p=1):

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots). \tag{44}$$

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1} \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{45}$$

В тождествах (43)-(45) мы ощущаем красоту и глубокую «математическую гармонию», которая удовлетворяет «принципу математической красоты Дирака». А разве нас не может не удивлять еще одно замечательное свойство «золотой p-пропорции:

$$\underbrace{\lim}_{n \to \infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = \Phi_p, \tag{46}$$

где $F_p(n), F_p(n-1)$ - соседние p-числа Фибоначчи. Но, как упоминалось, p-числа Фибоначчи весьма необычным способом связаны с **треугольником Паскаля** – еще одним удивительно «гармоничным» объектом математики, который встречается во многих разделах математики. В этой связи уместно вспомнить высказывание знаменитого математика **Якоба Бернулли** по поводу треугольника Паскаля:

«Эта таблица имеет ряд чудесных свойств. … Мы показали, что она составляет существо теории соединений, но те, кто тесно соприкасаются с геометрией, знают, что она хранит ряд фундаментальных секретов этой области математики».

Из уравнения $x^2 = x + 1$ вытекает следующее свойство «золотой пропорции», которое возникает при представлении «золотой пропорции» в виде «цепной дроби»:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}} \tag{47}$$

Оказывается, что выражение (47) имеет глубокий математический смысл. В работах российских математиков **А.Я. Хинчина** и **Н.Н. Воробьева** обращено внимание на тот факт, что выражение (47) выделяет «золотую пропорцию» среди других иррациональных чисел, то есть, с точки зрения цепных дробей, **«золотая пропорция» является уникальным иррациональным числом.**

Но оказывается подобным свойством обладают «металлические пропорции», задаваемые (36):

$$\Phi_\lambda = \lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \ldots}}} \tag{48}$$

Именно это и другие свойства «металлических пропорций» привлекли особое внимание настоящих профессионалов в нашей области (**Вера Шпинадель**, **Александр Татаренко**, **Мидхат Газале**, **Джей Каппрафф, Грант Аракелян, Виктор Шенягин, Александр Майборода и Николай Косинов**), которые приняли решение исследователь алгебраическое уравнение $x^2 = \lambda x + 1$, как источник нового класса «гармонических пропорций» природы.

Поэтому ни о каком «прыжке» в «общую теорию алгебраических полиномов» не может быть и речи! «Математика гармонии» - это оригинальная математическая теория, которая имеет междисциплинарное значение. И ее новые математические константы («золотые p-пропорции» и «металлические пропорции») и новые рекуррентные числовые последовательности («обобщенные числа Фибоначчи и Люка») будут все шире распространяться и использоваться в теоретическом естествознании. И в качестве примера уместно привести один пример использования *p-чисел Фибоначчи* в биологии [44]. В статье [44] описан удивительный результат, касающийся деления биологических клеток. Оказывается, что это деление является ***асимметричным*** и закон такого деления описывается *p-числами Фибоначчи!* То есть, природа при делении биологических клеток из огромного количества числовых последовательностей почему-то выбрала *p-числа Фибоначчи!* И мы снимаем шляпу перед *p*-числами Фибоначчи и будем ждать их новых приложений в теоретическом естествознании! О каком же «эпилоге» в развитии МГ может идти речь?

6. Перспективы развития «математики гармонии»

В этой части я высказываю свою личную точку зрения, которая может и не соответствовать точкам зрения других исследователей. Из работ современных исследователей я бы выделил следующие интересные предложения:

6.1. Предложение Сергея Абачиева о развитии МГ «по вертикали»

Это предложение высказано в статье [45] и затем развито в статье [46]. Суть предложения состоит в следующем. Выше было указано на связь *p-чисел Фибоначчи* с *треугольником Паскаля,* откуда следует, что треугольник Паскаля также является выразителем *математической гармонии,* если он порождает *p-числа Фибоначчи.*

Еще в 20 в. Сергей Абачиев провел интереснейшее исследование треугольника Паскаля с позиций *теории фракталов* и установил ряд новых, инвариантных отношений в треугольнике Паскаля. Все вышеизложенное дает основание утверждать, что именно треугольник Паскаля является фундаментальным математическим объектом, который лежит в основе *математики гармонии* – нового междисциплинарного направления современной науки, которое можно назвать *МГ-1.*

Новый взгляд на треугольник Паскаля, изложенный в работах **С.К. Абачиева,** открывает перспективы качественного углубления *матема-тики гармонии,* что может привести к созданию *математики гармонии-2 (МГ-2),* которая будет непосредственно связана с фрактальной геометрией Б. Мандель-брота.

В завершение статьи [46] ее авторы написали:

«В реальной теоретической науке новые теории никогда не создаются в одиночку, одноактно, по принципу «А почему бы не углубить старую теорию?». Формирование научных теорий – полярная противоположность созданию философских трактатов. Научные теории формируются коллегиально, поэтапно и не иначе, как ***в ходе*** *решения частных задач* ***и во имя*** *наиболее эффективного решения частных задач. В физико-математических науках процесс их формирования неотделим от вычислений, повышенная точность которых нередко весьма желательна.*

В настоящее время интенсивно разрабатываются фрактальные информационные технологии, информационные технологии на основе теории динамического хаоса, с оптимальным псевдошумовым кодированием информации по типу голографичес-кого. В соответствующие расчётные методы числовые фракталы треугольника Па-скаля уже сейчас могут внести повышенную точность. Имеется в виду то, что они вместо приближённых расчётов с помощью формулы Стирлинга дают возможность точного представления биномиальных коэффициентов. Как подчёркивалось в § 1, вычислительная математика после пионерских исследований Б. Мандельброта пе-рестала играть традиционную сугубо вспомогательную роль. Она стала открывать фундаментальные законы природы поистине вселенской общности. Представляется правдоподобным, что использование качественно новых вычислительных способностей треугольника Паскаля и станет первым шагом на пути формирования будущей МГ-2».

6.2. Предложение Валентина Бунина

Валентин Алексеевич Бунин является автором замечательной книги [47]. В этой книге представлено решение проблемы гармонизации сложной системы произвольной природы. Под гармонизацией понимается применение найденного автором **Математического Кода**, обеспечивающего наилучшее соотношение трех главных параметров (начал – размерностей) в любых системах науки, практики, искусства – по критерию гармонии, как соответствия всех подсистем, вплоть до мельчайших – наноподсистем – их главной целевой функции. Соблюдение этого Кода гарантирует целостность и устойчивость любой системы вплоть до системы Мироздания.

В «Письме Алексею Стахову» [48] В.А. Бунин популярно излагает суть предложенного им **Математического Кода Гармонии**:

«*Как и Вы, я в большинстве своих работ стремился к обобщениям ранее известного. Применительно к Гармонии, в отличие от всех ранее известных обобщений, которые я именую «одноначальными», мое обобщение, математически изложенное в подаренной Вам книге «Биоподобие техногенных систем», также впервые за прошедшие тысячелетия является не одноначальным, а троеначальным обобщением. Поясню: из трех наиболее известных начал (длина L, время T, масса M) геометры, архитекторы и т.п. занимаются гармонизацией, напр. «золотым рассечением», только L; физики, химики и т.п., напр. Д.И.Менделеев – занимался оптимизацией массы гирь, - «золотым рассечением» массы M; музыканты секли время T. И никто, насколько мне известно, никогда даже не задумывался всерьез с математикой в руках поискать то, что давно уже найдено Природой: объект предельно совершенный, всеми частями соответствующий своему целевому назначению, т.е. гармоничный, или, по моей терминологии, метагармоничный. Именно для создания таких биоподобных объектов и предназначен описанный в упомянутой книге Код Метагармонии, действенность которого подтверждена даже экспериментально, не говоря уж о строгости теоретического вывода*»

6.3. Использование «гармонических фигур» Г.Д Гримма и древних египтян в работах П.Я. Сергиенко

В 1935 г. была опубликована книга известного российского архитектора профессора **Г.Д. Гримма** «Пропорциональность в архитектуре» [49]. Оригинальным результатом книги Гримма является изложение основ теории пропорционального согласования площадей прямоугольников, треугольников, кругов и объемов по «принципу золотого сечения». Книга проф. **Г.Д. Гримма** опубликована в 1935 г. С этого момента она по какой-то причине не переиздавалась. И не во всех библиотеках ее можно обнаружить. Поэтому не удивительно, что многие «золотосеченцы» имеют смутное представление о ее содержании.

Для пропорционального согласования площадей, Гримм решает **«задачу деления площади на две неравные площади, из которых большая во столько раз менее основной площади, во сколько меньшая менее большей»**. Эта наработка Гримма была использована современным исследовтелем гармонии Петром Сергиенко для создания теории сплошного заполнения плоскости с помощью «гармоничных прямоугольников» [50].

Следует отметить еще одну разработку **П.Я. Сергиенко** – сплошное заполнение плоскости «гармоническими треугольниками» [51]. Под «гармоническим треугольником» Сергиенко понимает так называемый «золотой прямоугольный треугольник», в котором гипотенуза так относится к большему катету, как больший катет к меньшему катету. Уместно напомнить, что «золотой прямоугольный треугольник» был использован древними египтянами при создании «Большой Пирамиды» в Гизе [52].

И хотя геометрические фигуры, которые использует **П.Я. Сергиенко** для заполнения плоскости, не являются оригиналными (к этим фигурам первыми пришли Г.Д. Гримм и древние египтяне), тем не менее подход **П.Я Сергиенко** может оказаться полезным при создании «гармноичных моделей». Об этом свидетельствует его последняя статья **«Математическая модель энергоинформационной вселенной в эру Водолея (Послание будущего из прошлого)»** [53], которая заслуживает внимания и изучения.

7. Международный Конгресс по Математике Гармонии (Одесса, 8-10 октября 2010)

С 8 по 10 октября 2010 г. в Одесском Национальном Университете им. И.И. Мечникова был проведен **1-й Международный Конгресс** на тему:

"СОВРЕМЕННЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ ГАРМОНИИ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ, ЕСТЕСТВОЗНАНИИ, ТЕХНОЛОГИИ, СОЦИУМЕ И ОБРАЗОВАНИИ".

Инициатива кафедры менеджмента и математического моделирования рыночных процессов Института математики, экономики, механики Одесского Национального Университета им. И.И. Мечникова (доц. **Егорова-Гудкова Т.И.**, д.э.н. **Садченко Е.В.**), поддержка администрации университета (акад. **Сминтына В.А.**, проф. **Запорожченко А.В.**, проф. **Круглов В.Е.**) и публикация мое книги **“The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science”** (World Scientific, 2009), и стали непосредственной причиной проведения настоящего Международного Конгресса.

Главной целью Конгресса было закрепить приоритет славянской науки в развитии этого важного направления и ознакомить участников с основными направлениями развития «Математики Гармонии», как нового междисциплинарного направления современной науки, и с деятельностью Одесского Национального Университета им. Мечникова по внедрению в учебный процесс нового учебного курса «Математика Гармонии».

Проведению Конгресса предшествовало несколько важных событий, касающихся «Математики Гармонии». Прежде всего, в рамках подготовки к Конгрессу в университете был создан "Музей Математики Гармонии", в котором с помощью живописных планшетов представлены история Математики Гармонии, начиная с Пифагора, Платона, Евклида, и примеры проявления "Математики Гармонии" в природе, науке и искусстве. В начале 2010 г. в Одесском Национальном Университете им. И.И. Мечникова принято решение ввести курс **"Математика Гармонии"** в учебный план подготовки студентов специальности «Менеджмент организаций», 4-й курс. Такой курс был прочитан мною в сентябре-октябре 2010 года.

Непосредственно перед началом Конгресса состоялась встреча ректора университета проф. **Коваля И.Н.** с тремя участниками Конгресса, ведущими в мире специалистами в этой области – сопредседателем Конгресса проф. **Стаховым А.П.** (Канада) и членами оргкомитета – проф. **Сороко Э.М.** (Беларусь) и проф. **Скоттом Олсеном** (США). Встреча прошла в дружественной обстановке. Беседа велась на двух языках (русском и английском), потому что проф. Коваль свободно владеет английским языком (он год стажировался в США). Была отмечена важная роль Конгресса, в работе которого приняли участие ряд известных ученых из других стран (США, Канада, ФРГ, Чили, Южная Африка), в расширении контактов Одесского национального университета с зарубежными университетами, что является одной из стратегических целей Одесского национального университета в период подготовки к празднованию 150-летия университета, которое будет отмечаться в 2015 г. Именно во время этой встречи проф. Скотт Олсен произнес замечательные слова:

«Университет, который первым введет математику гармонии и сопряженные дисциплины в учебный процесс, станет мировым лидером в сфере образования», которые были взяты в качестве эпиграфа Резолюции Конгресса.

В заключение встречи ее участники обменялись презентами и книгами. Проф. Коваль вручил профессорам Стахову, Сороко и Олсену книги, посвященные истории Одесского университета.

На пленарных заседаниях (8, 9 и 10 октября) было сделано 30 докладов по теории «Математики Гармонии» и ее приложениям в различных сферах современной науки. Прежде всего, необходимо отметить широкую географию участников Конгресса – от США, Канады, Чили, ФРГ до Украины (Одесса, Львов, Запорожье, Сумы), России (Москва, Санкт-Петербург, Саратов, Красноярск, Тюмень), Беларуси (Минск, Гомель). Участие в работе Конгресса ученых, прибывших из Тюмени и Красноярска (**Коновалов и Южанников**) можно считать героическим поступком, если учесть стоимость авиабилетов до Одессы. Таким же героическим поступком является участие в Конгрессе Почетного профессора Белорусского государственного университета транспорта **Семенюты Н.Ф.** (Гомель), если учесть, что ему свыше 80 лет и перед Конгрессом он тяжело переболел.

Характерной особенностью Конгресса явилось участие в нем специалистов, работающих на стыке наук. Доктор философских наук **Эдуард Сороко** (Минск) является математиком по базовому образованию, доктор физико-математических наук **Сергей Петухов** (Москва) является одновременно кандидатом биологических наук, доктор философских наук **Александр Волошинов** (Саратов) одновременно является кандидатом физико-математических наук, доктор технических наук **Александр Коновалов** (Тюмень) имеет также ученую степень кандидата географических наук.

О высоком профессиональном уровне докладчиков свидетельствует перечень книг, изданных участниками Конгресса в 21 в.:

1. Крючкова І.В.Структурні чинники розвитку економіки України, Київ, 2004

2. Иванус А.И. Код да Винчи в бизнесе или гармоничный менеджмент по Фибоначчи, Москва, URSS, 2005

3. Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фибоначчи, Изд-во «Питер», 2006

4. Боднар О.Я,. «Золотий переріз і неевклідова геометрія в науці та мистецтві», Львів, 2005.

5. Scott Olsen. "The Golden Section. Nature's Greatest Secret," 2006.

6. Цветков В.Д. Золотая гармония и сердце, Пущино, 2008.

7. Петухов С.В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. Москва, 2008

8. Сороко Э.М. Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем. Введение в общую теорию гармонии систем, URSS, (2-е изд., 2006, 3-е изд., 2009)

9. Мартыненко Г.Я. Введение в теорию числовой гармонии текста, Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2009

10. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science, World Scientific, 2009

11. Когновицкий О.С. Двойственный базис и его применения в телекоммуникациях. Санкт-Петербург, 2009 (Гл. 9. Применение двойственного базиса для анализа и обработки числовых рекуррентных рядов)

12. Южанников А.Ю. Золотое сечение и техноценозы в системах электроснабжения. Красноярск, 2009.

13. Тимошенко Л.В. Космические загадки творчества, Москва, 2010

Это и есть те реальные достижения в области «золотого сечения» и «математики гармонии», полученные лучшими представителями этого направления в 21 в.

Все участники Конгресса сделали интересные доклады. Особый интерес вызвал доклад проф. **Скотта Олсена** (США), сделанный им на основе его книги **"The Golden Section. Nature's Greatest Secret"** (2006), получившей широкое признание в среде «золотосеченцев». Особенность Конгресса состояла в том, что на нем были широко представлены доклады экономического профиля (**И.В. Крючкова, А.И. Иванус, А.С. Харитонов, В.М. Бондаренко, Т.И. Егорова-Гудкова** и др.), что свидетельствует о проникновении идей гармонии и «золотого сечения» в эту важную прикладную область. При этом особый интерес вызвал доклад доктора экономических наук Ирины Крючковой «Проявление действия закона золотого сечения в структурировании экономики», если при этом учесть, что она защитила первую в истории науки докторскую диссертацию в области экономических наук с использованием «золотого сечения», опубликовала книгу на эту тему (2004) и при этом занимает высокий государственный пост, будучи зам. министра экономики Украины.

Глубокие доклады были сделаны нашими «тяжеловесами», известными учеными в этой области – доктором философских наук Сороко (Минск), доктором искусствоведения Боднаром (Львов), доктором физико-математических наук Петуховым (Москва), доктором философских наук Волошиновым (Саратов) и другими.

Конгресс открыл научному сообществу новые имена. Прежде всего, это - доцент Сумского университета **Сергей Якушко**, рассказавший в своем докладе о сенсационном открытии в области химии – обнаруженной им фибоначчиевой закономерности в таблице Менделеева. Необходимо отметить доклад проф. **Олега Когновицкого** (Санкт-Петербург), в котором проведен глубокий анализ рекуррентных последовательностей Фибоначчи с использованием так называемого двойственного базиса, что имеет большое значение для развития теории помехоустойчивого кодирования. Прекрасные доклады были сделаны доктором технических наук **Александром Коноваловым** (Тюмень), кандидатом технических наук **Александром Южанниковым** (Красноярск), **Денисом Клещевым** (Россия), **Александром Чечиком** (Киев) и др.

С большим интересом были заслушаны доклады проф. **Сергея Абачиева** (Москва), доктора технических наук **Валериана Владимирова** (ФРГ), доктора биологических наук **Елены Терешиной** и др.

Особый шарм Конгрессу придало участие в нем представителей искусства, прежде всего, «звездного маэстро», композитора, исполнителя и кандидата наук в области астрофизики **Леонида Тимошенко**, композитора, музыканта и поэта **Юрия Цымбалиста** и исполнителя народных и классических песен доктора филологических наук проф. **Григория Мартыненко**. Концерт, данный Тимошенко, Цымбалистом и Мартыненко, в завершение 1-го дня Конгресса, несомненно, стал одним из наиболее ярких впечатлений. «Звездный маэстро» исполнил несколько своих произведений на фортепиано экспромтом на заданные темы (например, на тему «Пифагор»), Юрий Цымбалист, в юности закончивший с отличием Черниговскую музыкальную школу, исполнил несколько своих песен (одна из них была посвящена Конгрессу). Но наибольшее впечатление произвел Григорий Мартыненко, который в сопровождении Цымбалиста (без всякой предварительной репетиции) исполнил украинскую, русскую и итальянскую народные песни. Когда в зале Ученого Совета университета зазвучал голос Мартыненко, то у многих сложилось впечатление, что в зале неожиданно появился народный артист Украины Анатолий Соловьяненко.

Своими решениями Конгресс четко определил задачи по развитию этого направления и его практического воплощения в современную жизнь. Создана Международная комиссия по «Математике гармонии», во главе с проф. Стаховым (Канада) и проф. Олсеном (США), которая будет координировать все работы по этому направлению.

Литература

1. Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998.
2. Harmony of spheres. The Oxford dictionary of philosophy, Oxford University Press, 1994, 1996, 2005
3. Vladimir Dimitrov. A new kind of social science. Study of self-organization of human dynamics. Morrisville Lulu Press, 2005.
4. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey. London. Singapore. Hong Kong: World Scientific, 2009.
5. Стахов А.П. Математика Гармонии как новое междисциплинарное направление современной науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12371, 19.08.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320001.htm)
6. А.П. Стахов, О «гипотезе Прокла» и противоречии между аксиомами Евдокса-Архимеда и Кантора (комментарий к статье Дениса Клещева) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16769, 20.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321214.htm
7. А.П. Стахов, Математизация гармонии и гармонизация математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16897, 16.10.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/100a/02320066.htm

8. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony: Clarifying the Origins and Development of Mathematics. Congressus Numerantium. 193 (2008), 5-48
9. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977.
10. Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.
11. А.П. Стахов, Микропроцессоры Фибоначчи - как одна из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16759, 16.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321212.htm
12. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
13. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г.
14. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984
15. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004.
16. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984
17. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994
18. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
19. Stakhov A. Rozin B. The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, Volume 8, No. 3, 2006 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
20. Stakhov A., Rozin B. The Golden Shofar . Chaos, Solitons & Fractals 2005, 26(3); 677-684.
21. Максим Борисов Немецкие математики установили, что Вселенная по форме напоминает дудку // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.11514, 16.09.2004 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/02310035.htm
22. Stakhov A., Rozin B. Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27 (5):** 1162-1177.
23. Stakhov A., Rozin B. The continuous functions for the Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals 2006, **28 (4)**: 1014-1025.
24. Шевелев И.Ш. Метаязык живой природы. Москва: Воскресенье, 2000.
25. Stakhov A. The Generalized Principle of the Golden Section and its applications in mathematics, science, and engineering. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **26 (2)**: 263-289.
26. Stakhov AP. A generalization of the Fibonacci *Q*-matrix. Доклады Академии наук Украины, 1999, №9, с. 46-49.
27. Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the “Cassini formula”, and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 30, Issue 1, 56-66.
28. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004)
29. Татаренко А.А. Золотой Тm-канон антропокосмоса – гармония золотых Тm-Гармоний мира. Рериховский вестник Дона № 11, 1999.
30. Gazale Midhat J**.** Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (русский перевод: Газале М. От фараонов до фракталов / Пер. с англ. А.Р. Логунова. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002).
31. Kappraff Jay. Beyond Measure. A Guided Tour through Nature, Myth, and Number. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002.
32. В.П. Шенягин, «Пифагор, или Каждый создает свой миф» - четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых *s*-пропорциях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17031, 27.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm
33. Грант Аракелян. Числа и величины в современной физике. Ереван: Изд. АН, 1989.

34. Грант Аракелян. Теория ЛМФ и принцип золотого сечения. Глава 8 // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16865, 02.10.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321231.htm
35. Грант Аракелян, О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322065.htm
36. А.О. Майборода, Естественная система единиц Планка и обобщенная формула «золотой пропорции» Татаренко-Шпинадель-Газале // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14814, 02.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321086.htm
37. Косинов Н.В., Золотая пропорция, Золотые константы и Золотые теоремы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14379, 02.05.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321049.htm
38. А.П. Стахов, Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm
39. A. Stakhov, S. Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Applied Mathematics, 2011 (in 3 issues: January, February, March).
40. А.П. Стахов, «Золотая» гониометрия и теоретическое естествознание // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17136, 22.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322098.htm
41. С.Л. Василенко, "Математика гармонии": на распутье // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17151, 28.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322104.htm
42. А.П. Стахов, Комментарий на статью С.Л. Василенко «Математика гармонии»: на распутье» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17157, 29.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322107.htm
43. Морис Клайн. «Математика. Утрата определенности». Перевод с англ. М.: Мир, 1984.
44. Colin Paul Spears and Marjorie Bucknell-Johnson. Asymmetric Cell Division: Binomial Identities for Age Analysis of Mortal vs. Immortal Trees. Applications of Fibonacci Numbers, Vol.7, 1998.-377-391.
45. С.К. Абачиев, Математика гармонии: от разработки «по горизонтали» к разработке «по вертикали» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16008, 22.07.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321188.htm
46. С.К. Абачиев, А.П. Стахов, Числовые фракталы и перспектива качественного углубления математики гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16931, 03.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322018.htm
47. В.А. Бунин, Код биоподобия.Троеначальный Код Метагармонии как биоподобия техногенных систем по критерию целевой функции // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15669, 24.11.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161582.htm
48. В.А. Бунин, Письмо Алексею Стахову // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17120, 19.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322092.htm
49. Гримм Г.Д. Пропорциональность в архитектуре. Ленинград-Москва: ОНТИ, 1935
50. Сергиенко П.Я., Сакральная геометрия гармонии фракталов // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15816, 07.03.2010 http://trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161619.htm
51. Сергиенко П.Я., Гармоничные («золотые») прямоугольные системы координат двухмерного пространства // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16992, 17.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322033.htm
52. Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Санкт-Петепрбург: Питер, 2006.
53. Сергиенко П.Я., 21. 12. 2012... Математическая модель энергоинформационной вселенной в эру Водолея (Послание будущего из прошлого) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17166, 01.01.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161914.htm