С.Л. Василенко

Прикладная гипотизация золотого сечения

Сказка ложь, да в ней намек!
А.С. Пушкин, 1834.
«Сказка о золотом петушке»

Нами принимаются в целом критические замечания Олега Боднара[1].

Тем более что их ключевой лейтмотив «об огромной массе материалов, без охвата которых вряд ли можно претендовать на полноту представлений о математическом пространстве теории гармонии», полностью совпадает с нашей главной мыслью о несводимости развития математизации гармонии лишь в направлении уже изученных "металлических пропорций" и *p*-сечений.

Пожалуй, трудно только согласиться с его мнением, что, «являясь исследователем теории золотого сечения», следует непременно высказываться в духе коллег-соратников.

Что-то наподобие синхронного плавания.

Концептуально, на наш взгляд, это не способствует формированию верных и научно обоснованных представлений в предметной области.

Ведь какие порой не услышишь небылицы о золотом сечении в части его *прикладной гипотизации*, как процесса формирования гипотез. Возможно, оно и на плаву держится большей частью благодаря изложениям предположительного толка, чем реальным заслугам-достижениям, проверенным математикой.

Чего только не увидишь в коммуникационном пространстве...

Но и на этих осколках всё равно быстро взойдут благодатные всходы разноголосицы.

Что поделаешь.

Объект простой.

Одновременно феноменальный, красивый и уникальный.

Вот и "кружат" вокруг него томящиеся исследователи разных направлений.

Вчера были просто стоматологические услуги, сегодня – корректировка зубов в золотой пропорции. Разница налицо.

Ещё недавно рассматривали патологии сердцебиения. Сегодня вам обязательно покажут отклонение от нормы, определяемой ... непременно золотым сечением.

Ну, и так далее и тому подобное.

Жизнь не скучает и продолжает радовать нас своими новыми необычными сюрпризами…

В рамках проходящего on-line-семинара на страницах академии АТ презентован доклад исследователей из Сербии–Хорватии по материалам одной из конференций (2011) [1].

В частности, как информирует аннотация: «главная идея доклада состоит в том, чтобы *связать золотое сечение с искусственным интеллектом, используя гиперболические функции Фибоначчи и Люка* (ГФЛ)... Как вытекает из Заключения, установление точного соотношения между константами *e* и Ф, выведенное в настоящей статье, выдвигает явление "золотого сечения" (ЗС) в качестве частного случая марковских процессов, что и лежит в основе нового подхода к искусственному интеллекту».

Со слов южных славян резюме звучит весьма внушительно.

Итак, нам предлагается предположительная схема-цепочка, якобы последовательно увязанных звеньев (рис. 1).

---

[1] *Боднар О.* Реплика по поводу статьи С.Л. Василенко: «Математика гармонии: на распутье» // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17240, 21.01.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322127.htm.

золотое сечение ⇒ ГФЛ ⇒ связь между константами e и Φ ⇒

⇒ марковский процесс ⇒ искусственный интеллект

Рис. 1. Предлагаемая схема-цепочка "внедрения ЗС" в искусственный интеллект
/ де-факто схема не обоснована из-за искусственного внедрения ГФЛ и тождественности связи $\Phi(e)$ /

По нашему мнению, то, что вся эта цепочка является голословной, становится понятным сразу же, после первого знакомства с существом материала, который содержит необоснованные утверждения.

Всё это, конечно, нужно и должно продемонстрировать, подтвердив доказательными рассуждениями.

Итак, по порядку и по возможности кратко...

1. Вероятностные картинки. Из теории вероятностей известно, что неубывающая функция распределения $F(x)$ любой случайной величины по определению стремится к единице при $x\to\infty$.

По аналогии с делением единичного отрезка функцию $F(x)$ можно разделить на две части в любом соотношении, в том числе и согласно золотой пропорции.

Наиболее простым является экспоненциальное или показательное абсолютно непрерывное распределение[2], моделирующее время между двумя последовательными свершениями одного и того же события:

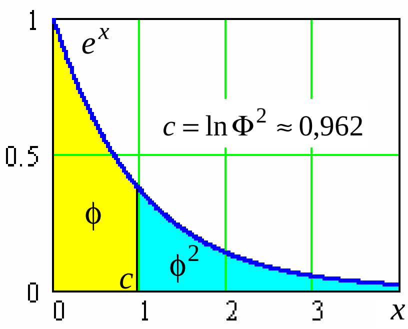
– плотность распределения $f(x)=\alpha e^{-\alpha x}$;

– функция распределения $F(x)=1-e^{-\alpha x},\ x\geq 0$,

где α – интенсивность или обратный коэффициент масштаба.

Математическое ожидание равно $\alpha-1$, медиана $\ln(2)/\alpha$, мода 0, коэффициент асимметрии 2.

В работе [1] рассматривается самое простое экспоненциальное распределение e^{-x} (с единичным коэффициентом $\alpha=1$), которое делится на две части:



$$1 = \int_0^\infty e^{-x}dx = \int_0^c e^{-x}dx + \int_c^\infty e^{-x}dx,$$

Для некоторой величины $0\leq z<1$ имеем $\int_0^c e^{-x}dx = 1-e^{-c} = z$, откуда $c=-\ln(1-z)$.

Полагая вместо z любое число, находим конкретное значение верхнего предела c.

Пусть $z=\phi=\Phi^{-1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ – число золотого сечения.

Тогда $c=-\ln(1-\phi)=-\ln\left(\phi^2\right)=-\ln\left(\Phi^{-2}\right)=2\ln\Phi$ – точка золотого сечения для экспоненциального распределения.

Собственно и всё. В этой части замечаний нет.

Разве что допустимо отметить сам факт привлечения внимания к феномену ЗС на примере вероятностных функций распределения, ассоциативно корреспондирующихся с классической задачей геометрического деления единичного отрезка.

[2] http://ru.wikipedia.org/?oldid=38445193.

Но всё это уже было (А. Иванус, С. Василенко[3] и другие).

2. "**Целомудренные" связи.** Любая информация о связи между константами Φ и e всегда вызывает живой и неподдельный интерес.

Оно и не удивительно.

Дело в том, что такую нетривиальную аналитическую связь установить чрезвычайно трудно, если вообще возможно.

Хотя бы потому, что онтологически это совершенно разные числа:

Φ – целое алгебраическое число, как корень многочлена с целыми коэффициентами, старший из которых равен единице;

e – трансцендентное число.

Впечатляющих успехов в этом направлении достиг в своё время гениальный индийский математик Рамануджан на примере составления бесконечных сумм [2, 3].

Так или иначе, но в его формулах, во всяком случае, присутствует число e и корень из пяти – предвестник золотого сечения.

Что же имеем в работе [1]? – Б*о*льшая её часть, по крайней мере, некорректна и/или содержит слабый материал.

В частности, в его начальной фазе:

– наличие "долгоиграющих" малопродуктивных преобразований;

– совершенно необязательное и логически необусловленное вклинивание гиперболичных функций ГФЛ;

– использование абсолютного тождества-определения логарифмической функции, выдаваемого за искомую связь $\Phi(e)$ и прочее.

На самом деле всё выглядит иначе. Да и проще.

Хорошо известно, что числа Люка можно описать, не только рекуррентно $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ с начальными условиями $(L_0, L_1) = (2,\ 1)$, но и аналитически в виде явной формулы Бернулли–Бине

$$L_n = \Phi^n + (-\Phi)^{-n}. \tag{1}$$

Рассматривая степень n как непрерывную переменную и функцию $L_n = L(n)$, допустимо записать производную

$$L_n' = \Phi^n \ln\Phi - (-\Phi)^{-n} \ln(-\Phi). \tag{2}$$

Тогда с учётом знания предела $\lim\limits_{n\to\infty} (-\Phi)^{-n} = 0$, а также свойств обычных степеней и натуральных логарифмов (по определению) получается, по сути, абсолютное тождество

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{L_n}{L_{n-1}}\right)^{\frac{L_n}{L_n'}} = \Phi^{\frac{1}{\ln\Phi}} \equiv e. \tag{3}$$

Собственно и все преобразования.

Заметим, что логарифм отрицательного числа существует, только он комплексный

$$\ln(-\Phi) \approx 0{,}481 + 3{,}142\, i, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Но это только усиливает общность рассуждений.

[3] Случайность и "золотая" пропорция в системе «хаос–порядок» // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15220 от 09.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322034.htm.

Полученная формула (3), конечно, имеет место быть.

Но разве можно здесь говорить о какой-то связи между Ф и e? – Нет! И ещё раз нет!

Ведь зависимость справедлива для любого числа x и тривиально следует из тождественного определения логарифма $x^{\frac{1}{\ln x}} = e$, где x – произвольное число: положительное или отрицательное, вещественное или комплексное.

√ Ну, и что мы здесь нашли? – С точки зрения констант ровным счётом ничего!

Возможно, кому-то это покажется любопытным, занимательным.

Но к взаимосвязи $\Phi(e)$ не имеет никакого сколь существенного отношения.

√ Функции ГФЛ здесь также не причём. – Есть они или нет, ровным счётом ничего не значит. Преобразования (1)–(3) элементарно получаются без них. То есть никакой переходной мостик ГФЛ на рис. 1 совершенно не нужен.

√ А в чём видны хоть малейшие признаки марковости? Да и где он здесь *марковский случайный процесс*, в котором будущее не зависит от прошлого при известном настоящем $x_{t+1} = \beta x_t + \varepsilon_{t+1}$? – Если числа Люка образуют полностью детерминированный ряд, зависящий только от пары фиксированных начальных значений, обычно (2, 1).

√ Далее в [1] вообще следует набор утверждений, никак не связанный логически с предшествующим материалом.

Причём в совершенно произвольной интерпретации.

Неизвестно, как и откуда берётся искусственный интеллект. Что и как конкретно в него "монтируется"? – Всё это остаётся непостижимой загадкой.

Равно как и откуда здесь «появляются все основания для введения феномена золотого сечения в область искусственного интеллекта»?

Другими словами, видим вольное творчество, причём явно невысокого качества.

Да и рекламируемые функции ГФЛ здесь выглядят как инородное образование.

Кстати, сама формульная формулировка "теоремы" [1] содержит явную ошибку, поскольку для чётных значений n рекуррентная формула вида $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ не работает, и нужно переходить на иные альтернативные формы записи, например, $L_n = 3L_{n-2} - L_{n-4}$

3. Тождественные манипуляции. Запись $\Phi^{\frac{1}{\ln \Phi}} = e$ нисколько не отражает ощутимую связь между константами $\Phi(e)$.

На месте Φ может стоять любое вещественное число.

Например, $\pi^{\frac{1}{\ln \pi}} = e$. Ну, и что с того?

Увы, но это типичная ошибка, когда в тождественной по определению записи выискивается проявление значимо выразительной числовой связи.

К этой же серии относятся, например, красивые и внешне эффектные манипуляции Г. Аракеляна [4] по формальному соединению тождеств-определений [5]:

- $x \equiv e^{\ln x}$ – равенство, вытекающее из определения логарифма с любым основанием, в данном случае в виде натурального логарифма e, то есть

$$x \equiv 2^{\lg_2 x} \equiv \pi^{\lg_\pi x} \equiv \Phi^{\lg_\Phi x};$$

- $\operatorname{sh} x \equiv \left(e^x - e^{-x}\right)/2$ – определение (обозначение) функции гиперболического синуса с обратной функцией – гиперболическим арксинусом (ареасинусом) $\operatorname{arsh} x \equiv \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Соединяя два тождества при $x = 1/2$, получаем $\Phi = e^{\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = e^{\operatorname{arsh} 1/2}$.

Понятно, что ни о какой связи между константами $\Phi(e)$ здесь говорить также не приходится.

Да и откуда ей взяться... Если, как говорится в причинно-следственной лексике русского языка, «один трамвай зелёный, а другой ... свернул за поворот». – То есть константы "произросли на совершенно разных огородах".

Корни-истоки у них неодинаковые.

4. А был ли мальчик?[4] В комментариях к [1] высказывается мысль, что «исследования ученых Сербии и Хорватии основываются на фундаментальном результате – ГФЛ».

На примере изложения формул (1)–(3) мы уже убедились, что это не так.

Взглянем на то же самое в транспозиции "от общего к частному".

Рассмотрим *обобщённую квадратичную последовательность Люка* [6] $\mathrm{L}_n = m\mathrm{L}_{n-1} + q\mathrm{L}_{n-2}$ с начальными условиями $(L_0, L_1) = (2,\ m)$, элементы которой определяются в явном виде по формуле [7]:

$$\mathrm{L}_n = \lambda^n + (-\tilde{q})^n, \tag{4}$$

где $\lambda = \dfrac{m + \sqrt{m^2 + 4q}}{2}$ – положительный корень квадратного уравнения $x^2 = mx + q$, $\tilde{q} = \dfrac{q}{\lambda}$.

В общем случае, считая параметр n непрерывной переменной, можно определить производную

$$\mathrm{L}'_n = \lambda^n \ln\lambda + (-\tilde{q})^n \ln(-\tilde{q}). \tag{5}$$

Поскольку λ – корень квадратного уравнения, то выполняется равенство $\lambda^2 = m\lambda + q$.

После деления его на величину λ для положительных коэффициентов $m, q > 0$ следует соотношение $\lambda - \tilde{q} = m$. То есть справедливо неравенство $\lambda > \tilde{q}$.

С учётом этого имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\mathrm{L}_n}{\mathrm{L}_{n-1}}\right)^{\frac{\mathrm{L}_n}{\mathrm{L}'_n}} = \lambda^{\frac{1}{\ln\lambda}} \equiv e. \tag{6}$$

Итак, формулы (1)–(3) для "золотого" уравнения $x^2 = x + 1$ успешно расширены на квадратное уравнение общего вида $x^2 = mx + q$ в виде соотношений (4)–(6).

И заметим, без какого-либо упоминания о ГФЛ.

Более того, это просто невозможно сделать.

Ибо ГФЛ утрачивают органически-преемственную связь с обычным квадратным уравнением общего вида при $q > 1$.

ГФЛ имеют смысл исключительно для случая: $x^2 = mx + 1$. И дальше него (в контексте усложнения) элементарно не работают.

Оно и не удивительно.

Дополнительную информацию в математику эти функции не привносят, и привнести не могли. Поскольку явились в результате искусственно-тривиальной замены обозначений, то есть вследствие чисто буквенных манипуляций.

---

[4] Устойчивое выражение русского языка, означающее сомнение в самом факте существования предмета обсуждения. Восходит к цитате из романа М. Горького «Жизнь Клима Самгина».

Они полностью повторяют известные в математике огибающие линии к кривым семейства функций, основанных на модификациях непрерывной функции Люка или Фибоначчи, о чём подробно изложено в работах [8–11].

Таким образом, к записям (3) и (6) ГФЛ не имеют никакого отношения.

5. Развенчанная индивидуальность. Ещё раз обратим внимание на то, что выражение (3) не отражает индивидуальную взаимосвязь $\Phi(e)$. На месте константы золотого сечения Φ теоретически может стоять любое число.

Другими словами, нет такого ненулевого числа, которое нельзя представить в виде описанной манипуляционной модели на основе квадратного уравнения общего вида $x^2 = mx + q$, не обязательно с целыми коэффициентами (m, q).

Возьмём, например, для определённости произвольное число $|\lambda| > 1$.

Оно является аттрактором последовательности $\mathrm{L}_n = (\lambda - 1)\mathrm{L}_{n-1} + \lambda \mathrm{L}_{n-2} = \lambda^n + (-1)^n$ с характеристическим квадратным уравнением $x^2 = (\lambda - 1)x + \lambda$ или $(x+1)(x-\lambda) = 0$.

Производная $\mathrm{L}'_n = \lambda^n \ln \lambda + (-1)^n \ln(-1)$.

И для этого числа λ также выполняется соотношение (6).

Таким образом, по логике авторов [1] число-параметр λ пригодно для "внедрения" в искусственный интеллект по схеме на рис. 1.

Ну, и в чём же здесь, как говорится, фишка? – Если все вещественные и комплексные числа, включая ЗС, можно использовать в искусственном интеллекте.

Но это и так понятно, ибо есть самоочевидная и бесспорная истина.

П р и м е р .

Пусть $\lambda = 2$. Тогда $\mathrm{L}_n = \mathrm{L}_{n-1} + 2\mathrm{L}_{n-2} = 2^n + (-1)^n$.

Производная $\mathrm{L}'_n = 2^n \ln 2 + (-1)^n \ln(-1)$.

Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\mathrm{L}_n}{\mathrm{L}_{n-1}} \right)^{\frac{\mathrm{L}_n}{\mathrm{L}'_n}} = 2^{\frac{1}{\ln 2}} \equiv e$.

Понятно, ни о какой особенной функциональной связи между двойкой и числом e говорить не приходится.

Функции ГФЛ здесь тоже совершенно не нужны.

Ну а то, что число 2 можно использовать в искусственном интеллекте, ясно и без дополнительных исследований. – Хотя бы в качестве основания позиционной двоичной системы счисления.

6. Зри в корень. При всём уважении к творчеству южнославянских авторов [1] приходится лишь сожалеть, что их публикация с ошибочными утверждениями становится предметом расширения на других электронных ресурсах.

Но есть там всё-таки один объект, заслуживающий внимания.

Им является формула, которая не приведена в тексте, но скромно отражена в конце презентации доклада:

$$e = \Phi^{\frac{2}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\Phi^n}}}. \qquad (7)$$

Или после логарифмирования $\ln\left(\Phi^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,\Phi^n}$. Сравните: $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi^n}$.

Об этом в тексте [1] нет ни слова.

Хотя имеет место быть по-настоящему интересная формула (7).

Здесь действительно просматривается некоторая связь $\Phi(e)$, причём через бесконечное суммирование.

В этом смысле она определённым образом корреспондируется с отдельными равенствами С. Рамануджана [2, 3].

Именно операция бесконечного суммирования позволяет "выправить" числовой баланс между онтологически разными константами: алгебраической целой и трансцендентной.

В этом смысле достоверность результата (7) существенно выше (6).

7. Альтернативы. Формула (7), правда, любопытная.

Во всей своей красе, как бы оправдывая и компенсируя время, потраченное на ознакомление с не очень выразительным докладом.

Подобные соотношения образуются при разложении функции логарифма в ряд Маклорена[5] (частный случай ряда Тейлора) [12], например $|x| < 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \tag{8}$$

Поставляя, в частности $x = \phi = \Phi^{-1} \approx 0.618$, получаем

$$\ln(1+\phi) = \ln\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\phi^n}{n}.$$

Формула (8) не имеет особой практической ценности, поскольку ряд очень медленно сходится и значение x ограничено весьма узким диапазоном.

Однако из неё нетрудно получить более удобную формулу:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}. \tag{9}$$

Этот ряд сходится быстрее. При $x = \phi$ имеем

$$\ln\frac{\Phi}{\phi^2} = \ln\Phi^3 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi^{2n-1}}{2n-1} \quad \text{или} \quad \ln\Phi^{3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi^{2n-1}}{2n-1}.$$

Аналогично (8) возможно ещё одно альтернативное прочтение, $|x| < 1$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \tag{10}$$

или для значения $x = \phi$ получается начальное соотношение (7):

---

[5] Ряд Маклорена – частный случай разложения бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности нулевой точки $x = 0$. – Ряд Тейлора. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=40194343. Логарифм. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=40411906.

$$-\ln\phi^2 = \ln\Phi^2 = 2\ln\Phi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi^n}{n} \quad\Rightarrow\quad \left\{e = z^{\frac{1}{\ln z}}\right\} \quad\Rightarrow\quad e = \Phi^{\frac{2}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi^n}{n}}}\ .$$

Строго говоря, здесь тоже некорректно говорить о функциональной связи $\Phi(e)$.

Исходные формулы (8)–(10) имеют всеобъемлющий характер для любого значения $|x|<1$ и не отражают некий специфический смысл числа золотого сечения.

Разве что затем используется очевидное тождество $1-\phi=\phi^2=\Phi^{-2}$, позволяющее внести незначительное дополнительное преобразование.

Но это не существенно.

Объединяя три разных варианта, можно записать:

$$\ln\Phi \ = \ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\phi^n}{n} \ = \ \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi^{2n-1}}{2n-1} \ = \ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi^n}{n}\,.$$

Таким образом, получили разные варианты разложения натурального логарифма константы золотого сечения по её целым степеням $\phi^n=\Phi^{-n}$.

Вместо заключения.

По мнению Андрея Никитина – нашего соавтора по ряду работ, говорить о золотом сечении (ЗС) в искусственном интеллекте (ИИ) пока не приходится.

Это больше походит на фантазии.

ЗС – прежде всего, математическая константа. А в ИИ число заметной роли не играет. Любое число.

В ИИ нет также геометрии, для которой ЗС что-то значит. Нет и пропорций, где можно применить ЗС.

ИИ – это система поиска логической информации для решения задач управления. Система принятия управляющего решения на основе выбора. И последующие конкретные действия согласно принятым решениям.

Тем не менее, можно предполагать, что как-то опосредованно ЗС всё же может влиять на ИИ. Хотя бы потому, что Живое некоторым образом связано с ЗС.

Никто пока не понимает как, но связано. Данную "спайку" подмечали многие исследователи, независимо друг от друга. И с этим трудно не считаться.

Что касается анализируемого доклада [1], то из него никак не следует взаимоотношение "ЗС – ИИ". Равно как и точное математическое выражение между константами e и Φ.

Можно с уверенностью сказать, пока что мы являемся очевидцами рождения очередной сказочной гипотезы в приложении золотой пропорции.

Суждено ли ей стать былью, покажет неугомонное время...

Ну, и конечно, действенные и обоснованные аргументы.

Литература:

1. *Tanackov I*, *Tepic J*, *Kostelac M*. The golden ratio as a new field of artificial intelligence - the proposal and justification // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17129, 20.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322095.htm.

2. *Ramanujan S*. Journal of the Indian Mathematical Society. – http://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/collectedpapers/question/qJIMS.htm.

3. *Weisstein E.W.* Ramanujan Continued Fractions // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/RamanujanContinuedFractions.html.

4. *Аракелян Г.* О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // Академия Тринитаризма. – М., Эл № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/2065-ar.pdf.

5. *Василенко С.Л.* Позолоченные балахоны // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17121, 19.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322093.htm.

6. *Василенко С.Л.* Эквивалентные формы квадратичных последовательностей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17134, 21.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322097.htm.

7. *Василенко С.Л.* Аналитика "золотых" пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.

8. *Василенко С.Л.* Гиперболические метаморфозы аддитивно-рекуррентных последовательностей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16255, 27.12.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161750.htm.

9. *Василенко С.Л.* Гиперболические лабиринты на пути к гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15513, 06.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161539.htm.

10. *Василенко С.Л.* Гиперболические фантазии // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 02.07.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=29&sm=2.

11. *Василенко С.Л.* О бедном квадрате замолвите слово... // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15675, 28.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161586.htm.

12. *Прикладная математика*. Справочник математических формул. – http://www.pm298.ru/tei.php.