Олег Боднар

СЕРЕБРЯНЫЕ ФУНКЦИИ И ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Серебряные функции (С.Ф.) – разновидность гиперболических функций, в основание которых положено число $q = 1 + \sqrt{2}$.

Название "серебряные" связано с наличием в основании q величины $\sqrt{2}$, характерной для квадрата. Отношение $1{:}\sqrt{2}$ – стороны квадрата к его диагонали – иногда называют серебряной пропорцией, которая наряду с золотой ($\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$) и т.н. бронзовой ($1{:}\sqrt{3}$) принадлежит к ряду пропорций, наиболее часто встречающихся в геометрии – в структурах многогранников, а золотая пропорция, кроме того, в природе и искусстве.

Как известно, в классических гиперболических функциях в качестве основания фигурирует неперово число $\boldsymbol{e}$, которое является также основанием натуральных логарифмов.

Кроме классических в современной математике развиваются исследования некоторых других разновидностей гиперболических функций, имеющих в качестве основания разные числа. В этой связи необходимо упомянуть о книге В.Шпинадель [1], где рассматриваются понятия "серебряные пропорции", "бронзовые пропорции" и "металические пропорции". Необходимо упомянуть также о "формулах Газале", введенных в книге [2], которые являются аналогами формулам Бине и задают новые рекуррентные числовые последовательности – k-числа Фибоначчи. Важно указать на публикацию А.П.Стахова [3], где впервые введен в общем виде новый класс гиперболических функций, основанных на "металических пропорциях", а также его, вместе с проф. Самуилом Арансоном, статью [4].

Все эти функции чрезвычайно интересны и открывают новые пути в развитии математики. С их помощью Стахову с Арансоном удалось решить четвертую проблему Гильберта, касающуюся гиперболической геометрии.

Но среди некласических гиперболических функций наибольше внимания современные математики уделили исследованиям золотых функциий (З.Ф.), основанным на золотой пропорции (З.П.).

Надо сказать, что разными авторами эти функции получены независимо и двумя разными путями.

В одном случае – в результате соответствующей трактовки формул Бинэ, принимая во внимание их изоморфность с формулами классических гиперболических функций [5]. В другом – как следствие математических исследований филлотаксиса [6]. В публикациях этих исследований для данного класса функций и было предложено название "золотые": золотой синус, золотой косинус, золотой тангенс и т.д.

Важно отметить, что именно математическое исследование филлотаксиса позволило раскрыть широкий геометрический и тригонометрический смысл золотых функций (З.Ф.) и обнаружить их применимость для описания природного формообразования. Кроме того обнаружилось, что З.Ф. владеют рядом математических свойств, которыми не обладают классические гиперболические функции, что также давало основания говорить об их исключительности и определенной методологической незаменимости.

Однако мы покажем, что подобными свойствами обладают также серебряные функции.

Для наглядности указанного сходства представим "параллельное" описание характерных свойств С.Ф. и З.Ф. и, соответственно, их оснований – $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{\phi}$.

Серебряные функции		Золотые функции
Квадратную решетку можно совместить с гиперплоскостью таким образом, что координаты $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ вершин решетки будут выражаться через степень числа $q = 1 + \sqrt{2}$	(1)	Квадратную решетку можно совместить с гиперплоскастью таким образом, что координаты $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ вершин решетки будут выражаться через степень числа $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
Это возможно, если за единицу гиперболического угла принимать половину угла, поворот на который приводит к самосовмещению решетки (рис.1а)		Это возможно, если за единицу гиперболического угла принимать половину угла, поворот на который приводит к самосовмещению решетки (рис.1б)

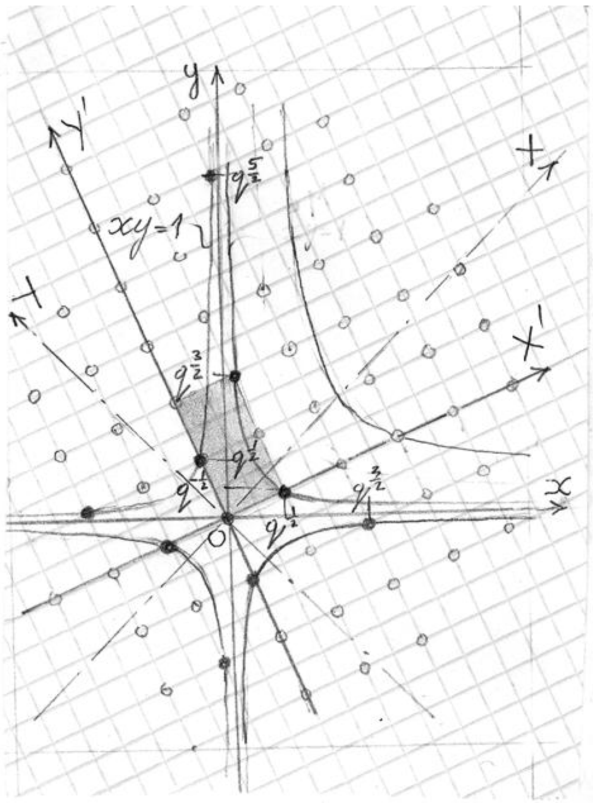

Рис.1а. Вариант совмещения квадратной решетки с гиперплоскостью, при котором координаты ***x*** и ***y*** вершин решетки выражаются через степень числа ***q***:
$x = \frac{a}{\sqrt{2}} q^{\mathrm{n}}$; $y = \frac{a}{\sqrt{2}} q^{-\mathrm{n}}$,
где ***a*** – полуось гиперболы, которой принадлежит рассматриваемая вершина;
n – угловая координата вершины.
В частном случае, для вершин гиперболы *xy*=1
$x = q^{\mathrm{n}}$; $\mathrm{y} = q^{-\mathrm{n}}$

Докажем, что $\mathrm{q} = 1 + \sqrt{2}$.
Рассмотрим рис.2а.

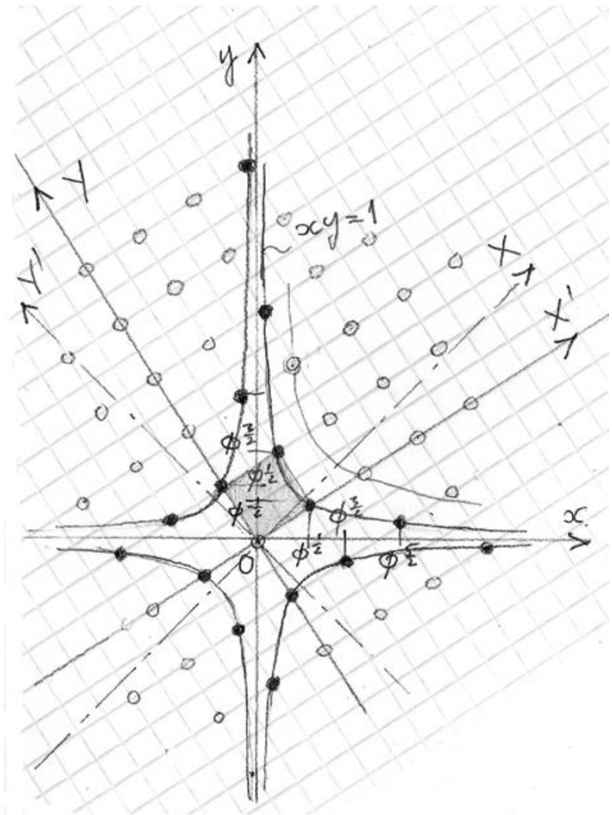

Рис.1б. Вариант совмещения квадратной решетки с гиперплоскостью, при котором координаты ***x*** и ***y*** вершин решетки выражаются через степень числа ***ϕ***:
$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \phi^{\mathrm{n}}$; $y = \frac{a}{\sqrt{2}} \phi^{-\mathrm{n}}$,
где ***a*** – полуось гиперболы, которой принадлежит рассматриваемая вершина;
n – угловая координата вершины.
В частном случае, для вершин гиперболы *xy*=1
$x = \phi^{\mathrm{n}}$; $y = \phi^{-\mathrm{n}}$

Докажем, что $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Рассмотрим рис.2б.

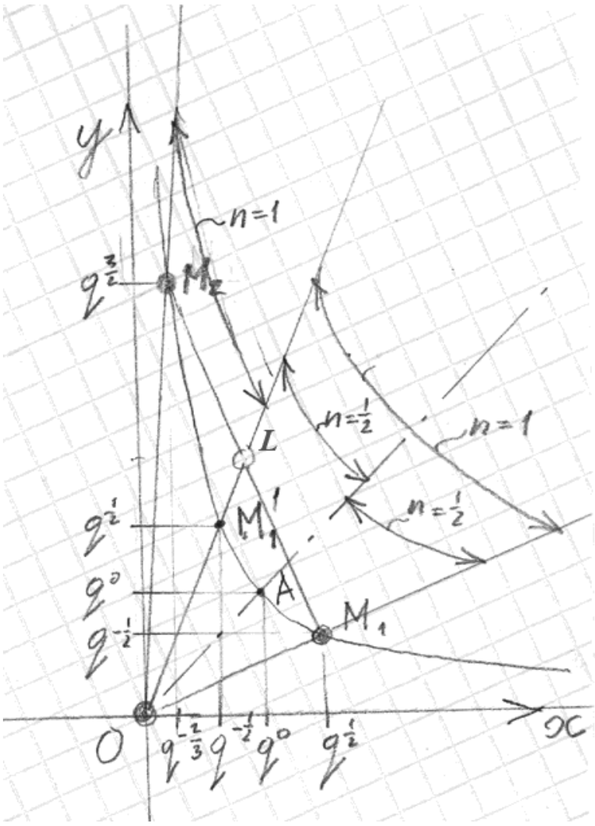

Рис.2а. Центральный фракмент рисунка 1а.

Исходные данные:
- OA – биссектриса угла yOx
- точки O, M_1, L, M_2 – вершины квадратной решетки;
- гиперболический угол $M_1OA = AOM_1' = \frac{1}{2}$
- гиперболический угол $M_1OM_1' = M_1'OM_2 = 1$

Доказательство

$$(OM_1)^2 = q^1 + q^{-1}$$

$$(OM_2)^2 = q^3 + q^{-3}$$

$$(M_1M_2)^2 = (OM_2)^2 - (OM_1)^2$$

$$M_1M_2 = 2(OM_1)$$

$$(OM_2)^2 - (OM_1)^2 = (2(OM_1))^2$$

$$(q^3+q^{-3}) - (q^1+q^{-1}) = 2(q^1+q^{-1})$$

$$q^2 - 1 + q^{-2} - 1 = 4$$

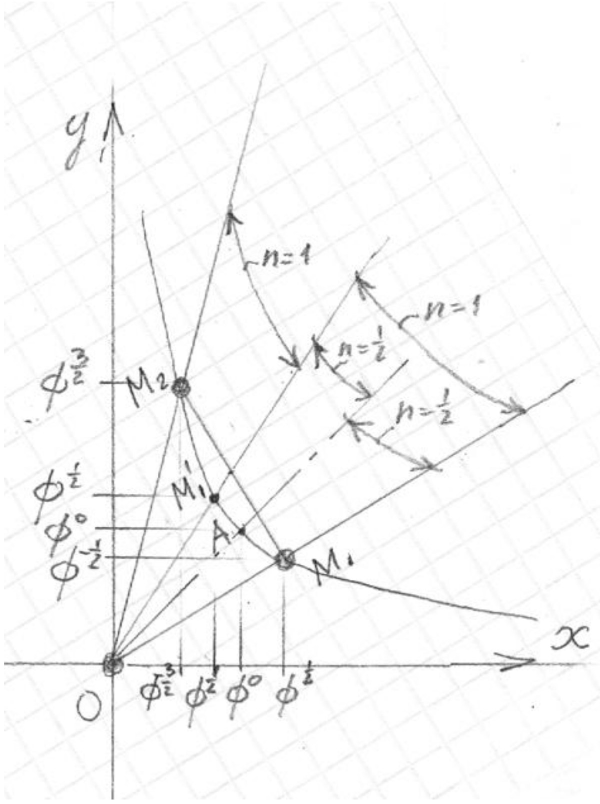

Рис.2б. Центральный фрагмент рисунка 1б.

Исходные данные:
- OA – биссектриса угла yOx
- точки O, M_1, M_2 – вершины квадратной решетки;
- гиперболический угол $M_1OA = AOM_1' = \frac{1}{2}$
- гиперболический угол $M_1OM_1' = M_1'OM_2 = 1$

Доказательство

$$(OM_1)^2 = \phi^1 + \phi^{-1}$$

$$(OM_2)^2 = \phi^3 + \phi^{-3}$$

$$(M_1M_2)^2 = (OM_2)^2 - (OM_1)^2$$

$$(M_1M_2)^2 = OM_1$$

$$(OM_2)^2 - (OM_1)^2 = OM_1$$

$$(\phi^3+\phi^{-3}) - (\phi^1+\phi^{-1}) = \phi^1+\phi^{-1}$$

$$\phi^2 - 1 - \phi^{-2} - 1 = 1$$

$$q^1 - q^{-1} = 2 \qquad (2)$$

$$q^2 - 2q - 1 = 0 \qquad (3)$$

Получаем $q = 1 + \sqrt{2}$

Приведем выражение $\boldsymbol{q}$ к виду, аналогичному по структуре выражению **ф**

$$q = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} \qquad (4)$$

Исследуем степенной ряд $\boldsymbol{q}^n$. Назовем его <u>серебряный ряд</u>.

…

$$q^{-4} = \frac{-12\sqrt{8}+34}{2}$$

$$q^{-3} = \frac{5\sqrt{8}-14}{2}$$

$$q^{-2} = \frac{-2\sqrt{8}+6}{2}$$

$$q^{-1} = \frac{\sqrt{8}-2}{2} \qquad (5)$$

$$q^{0} = \frac{0\sqrt{8}+2}{2}$$

$$q^{1} = \frac{\sqrt{8}+2}{2}$$

$$q^{2} = \frac{2\sqrt{8}+6}{2}$$

$$q^{3} = \frac{5\sqrt{8}+14}{2}$$

$$q^{4} = \frac{12\sqrt{8}+34}{2}$$

…

Серебряный ряд обладает двойным свойством – геометрической прогрессии и рекуррентной последовательности.

$$q^n = q \cdot q^{n-1} \qquad (6)$$

$$q^n = q^{n-2} + 2q^{n-1} \qquad (7)$$

В численных выражениях членов серебряного ряда ($\boldsymbol{q}^n$) сомножители при $\sqrt{8}$ – числа ряда

.., 29, -12, 5, -2, 1, 0, 1, 2, 5, 12, 29, … (8)

который обладает свойством (7)

$$ф^1 - ф^{-1} = 1$$

$$ф^2 - ф - 1 = 0$$

Получаем $ф = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$ф = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Исследуем <u>золотой ряд</u>.

…

$$ф^{-4} = \frac{-3\sqrt{5}+7}{2}$$

$$ф^{-3} = \frac{2\sqrt{5}-4}{2}$$

$$ф^{-2} = \frac{-\sqrt{5}+3}{2}$$

$$ф^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$ф^{0} = \frac{0\sqrt{5}+2}{2}$$

$$ф^{1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$ф^{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

$$ф^{3} = \frac{2\sqrt{5}+4}{2}$$

$$ф^{4} = \frac{3\sqrt{5}+7}{2}$$

…

Золотой ряд обладает двойным свойством – геометрической прогрессии и рекуррентной последовательности.

$$ф^n = ф \cdot ф^{n-1}$$

$$ф^n = ф^{n-2} + ф^{n-1}$$

В численных выражениях членов золотого ряда (**ф**^{n}) сомножители при $\sqrt{5}$ – числа ряда Фибоначчи

-3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, … (***F***)

который обладает свойством (7)

Назовем его рядом 2-Фибоначчи ($^2\boldsymbol{F}$)

Целочисленные слагаемые в числителях образуют ряд:

-14, 6, -2, 2, 2, 6, 17, 34 …

Назовем эту последовательность рядом 2-Люка ($^2\boldsymbol{L}$)

Устанавливаем следующее соответствие между числами 2-Фибоначчи и 2-Люка и их порядковыми номерами

N	0	1	2	3	4	5	6	7
^2F_n	0	1	2	5	12	29	70	169
^2L_n	2	2	6	14	34	82	198	478

Констатируем связь

$^2L_\mathrm{n} = {}^2F_{\mathrm{n-1}} + {}^2F_{\mathrm{n+1}}$

Зпишем формулу общего члена серебряного ряда:

$q^\mathrm{n} = \frac{^2F_n\ \sqrt{8}\ +\ ^2L_n}{2}$

По аналогии с золотыми запишем формулы серебряных функций. Для их обозначения используем знак $\boldsymbol{Q}$.

$Q\mathrm{shn} = \frac{q^\mathrm{n} - q^{-\mathrm{n}}}{2}$ – серебряный синус

$Q\mathrm{chn} = \frac{q^\mathrm{n} + q^{-\mathrm{n}}}{2}$ – серебряный косинус

$Q\mathrm{thn} = \frac{q^\mathrm{n} - q^{-\mathrm{n}}}{q^\mathrm{n} + q^{-\mathrm{n}}}$ – серебряный тангенс

Координаты $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ вершин решетки выражаются через серебряные функции:

$X = aQ\mathrm{chn}, \quad Y = aQ\mathrm{chn}$

Если за единицу длины принять сторону квадратной ячейки, а гиперболический угол отсчитывать относительно оси $\boldsymbol{OX'}$, то формулы координат $\boldsymbol{X'}$ и $\boldsymbol{Y'}$ произвольной вершины решетки примут вид

$X' = a' \frac{2}{\sqrt{8}} Q\mathrm{ch(n+1)}$

$Y' = a' \frac{2}{\sqrt{8}} Q\mathrm{sh\ n}$

Целочисленные слагаемые в числителях – числа Люка

(9) …, 7, -4, 3, -1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, … ($\boldsymbol{L}$)

Устанавливаем следующее соответствие между числами Фибоначчи и Люка и их порядковыми номерами

N	0	1	2	3	4	5	6	7
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29

Констатируем связь

(10) $L_\mathrm{n} = F_{\mathrm{n-1}} + F_{\mathrm{n+1}}$

Запишем формулу общего члена золотого ряда:

(11) $\phi^{\mathrm{n}} = \frac{F_\mathrm{n}\ \sqrt{5} + L_\mathrm{n}}{2}$

Запишем формулы золотых функций

(12) $G\mathrm{shn} = \frac{\phi^\mathrm{n} - \phi^{-\mathrm{n}}}{2}$ – золотой синус

$G\mathrm{chn} = \frac{\phi^\mathrm{n} + \phi^{-\mathrm{n}}}{2}$ – золотой косинус

$G\mathrm{thn} = \frac{\phi^\mathrm{n} - \phi^{-\mathrm{n}}}{\phi^\mathrm{n} + \phi^{-\mathrm{n}}}$ – золотой тангенс

Координаты $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ вершин решетки выражаются через золотые функции:

(13) $X = aG\mathrm{chn}, \quad Y = aG\mathrm{chn}$

Если за единицу длины принять сторону квадратной ячейки, а гиперболический угол отсчитывать относительно оси $\boldsymbol{OX'}$, то формулы координат $\boldsymbol{X'}$ и $\boldsymbol{Y'}$ произвольной вершины решетки примут вид

(14) $X' = a' \frac{2}{\sqrt{5}} G\mathrm{ch(n+1)}$

(15) $Y' = a' \frac{2}{\sqrt{5}} G\mathrm{sh\ n}$

где a' – совпадающий с OX' радиус гиперболы, которой принадлежит принадлежит рассматриваемая точка Формулой (14) выражаются числа ряда 2-Фибоначчи с четными, а формулой (15) – с нечетными порядковыми номерами:

$^2F_0 = \frac{2}{\sqrt{8}}\frac{q^0-q^0}{2} = 0;$ $\quad ^2F_1 = \frac{2}{\sqrt{8}}\frac{q^1+q^{-1}}{2} = 1;$

$^2F_2 = \frac{2}{\sqrt{8}}\frac{q^2-q^{-2}}{2} = 2;$ $\quad ^2F_3 = \frac{2}{\sqrt{8}}\frac{q^3+q^{-3}}{2} = 5;$

$^2F_4 = \frac{2}{\sqrt{8}}\frac{q^4-q^{-4}}{2} = 12;$ $\quad ^2F_5 = \frac{2}{\sqrt{8}}\frac{q^5+q^{-5}}{2} = 29;$

. . . .

$^2F_n = \frac{2}{\sqrt{8}}Q\operatorname{sh} n;$ $\quad ^2F_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{8}}Q\operatorname{ch}(n+1),$

где $\boldsymbol{n} = 2S-1;$ $S = 1, 2, 3, ...$

Таким образом, координатами X' и Y' вершин, принадлежащих веткам гипербол радиуса $a'=1$, будут числа ряда 2-Фибоначчи.

Но a' может принимать разные значения. Следовательно, бесконечному множеству гипербол соответствует бесконечное множество реккурентных последовательностей, составленных из координат X' и Y' вершин, принадлежащих той или иной гиперболе.

Уравнение гиперболы в системе координат $X'OY'$ имеет вид:

$(X')^2 + 2X'Y' - (Y')^2 = (a')^2$

Поэтому

$\left|(^2F_n)^2 + 2\,{}^2F_n\,{}^2F_{n+1} - (^2F_{n+1})^2\right| = 1$

$(a')^2 = 1$ – константа ряда 2-Фибоначчи, которая определяется с помощью пары соседних чисел ряда. Всякому ряду соответствует своя константа

$C = (a')^2$

Например, определим значение C для ряда 2-Люка, используя пары чисел 2 и 6, 6 и 14. Получим:

$\left|2^2 + 2\cdot2\cdot6 - 6^2\right| = 8$

$\left|6^2 + 2\cdot6\cdot14 - 14^2\right| = 8$

где a' – совпадающий с OX' радиус гиперболы, которой принадлежит принадлежит рассматриваемая точка Формулой (14) выражаются числа ряда Фибоначчи с четными, а формулой (15) – с нечетными порядковыми номерами:

$F_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\phi^0-\phi^0}{2} = 0;$ $\quad F_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\phi^1+\phi^{-1}}{2} = 1;$

$F_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\phi^2-\phi^{-2}}{2} = 1;$ $\quad F_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\phi^3+\phi^{-3}}{2} = 2;$

$F_4 = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\phi^4-\phi^{-4}}{2} = 3;$ $\quad F_5 = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\phi^5+\phi^{-5}}{2} = 5;$

. . . .

(16) $F_n = \frac{2}{\sqrt{5}}G\operatorname{sh} n;$ $\quad F_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{5}}G\operatorname{ch}(n+1),$

где $\boldsymbol{n} = 2S-1;$ $S = 1, 2, 3, ...$

Таким образом, координатами X' и Y' вершин, принадлежащих веткам гипербол радиуса $a'=1$, будут числа Фибоначчи.

Но a' может принимать разные значения. Следовательно, бесконечному множеству гипербол соответствует бесконечное множество реккурентных последовательностей, составленных из координат X' и Y' вершин, принадлежащих той или иной гиперболе.

Уравнение гиперболы в системе координат $X'OY'$ имеет вид:

(17) $(X')^2 + X'Y' - (Y')^2 = (a')^2$

Поэтому

(18) $\left|F_n^2 + F_n F_{n+1} - F_{n+1}^2\right| = 1$

$(a')^2 = 1$ – константа ряда Фибоначчи, которая определяется с помощью пары соседних чисел ряда. Всякому ряду соответствует своя константа

(19) $C = (a')^2$

Например, определим значение C для ряда Люка, используя пары чисел 3 и 4, 4 и 7. Получим:

$\left|3^2 + 3\cdot4 - 4^2\right| = 5$

$\left|4^2 + 4\cdot7 - 7^2\right| = 5$

Всякий ряд реализуется в системе координат *X'O Y'* в двух вариантах, различаемых по признаку знакопеременности.
В частности, ряд 2-Фибоначчи имеет варианты:
I) ... , 29, -12, 5, -2, 1, 0, 1, 2, 5, 12, 29, ...
II) ... ,-29, 12, -5, 2, -1, 0, -1, -2, -5, -12, -29, ...
Учитывая (7) и (16) делаем вывод:
Qshn + 2Qch(n+1) = Qsh(n+2);

Qchn + 2Qsh(n+1) = Qch(n+2)

Отношения соседних чисел ряда 2-Фибоначчи можно задать посредством цепной дроби:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=\frac{12}{29}$$

....

$$\frac{{}^2F_{\mathrm{n}-1}}{{}^2F_{\mathrm{n}}}=\frac{Q\mathrm{sh}(\mathrm{n}-1)}{Q\mathrm{ch\ n}}$$

$$\frac{{}^2F_{\mathrm{n}}}{{}^2F_{\mathrm{n}+1}}=\frac{Qc\mathrm{hn}}{Qs\mathrm{h}(\mathrm{n}+1)}$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{q^{\mathrm{n}-1}-q^{-\mathrm{n}+1}}{q^{\mathrm{n}}+q^{-\mathrm{n}}}=\mathrm{q}^{-1}$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{q^{\mathrm{n}}+q^{-\mathrm{n}}}{q^{\mathrm{n}+1}-q^{\mathrm{n}-1}}=\mathrm{q}^{-1}$$

(20)

(21)

Всякий ряд реализуется в системе координат *X'O Y'* в двух вариантах, различаемых по признаку знакопеременности.
В частности, ряд Фибоначчи имеет варианты:
I) ... , -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
II) ... , 8, -5, 3, -2, 1, -1, 0, -1, -1, -2, -3, -5, -8, ...
Учитывая (7) и (16) делаем вывод:
Gshn + Gch(n+1) = Gsh(n+2);

Gchn + Gsh(n+1) = Gch(n+2)

Отношения соседних чисел ряда Фибоначчи можно задать посредством цепной дроби:

$$1=\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}=\frac{3}{5}$$

....

$$\frac{F_{\mathrm{n}-1}}{F_{\mathrm{n}}}=\frac{G\mathrm{sh}(\mathrm{n}-1)}{G\mathrm{ch\ n}}$$

$$\frac{F_{\mathrm{n}}}{F_{\mathrm{n}+1}}=\frac{Gc\mathrm{hn}}{G\mathrm{ch}(+1)\mathrm{n}}$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\phi^{\mathrm{n}-1}-\phi^{-\mathrm{n}+1}}{\phi^{\mathrm{n}}+\phi^{-\mathrm{n}}}=\phi^{-1}$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\phi^{\mathrm{n}}+\phi^{-\mathrm{n}}}{\phi^{\mathrm{n}+1}-\phi^{-\mathrm{n}-1}}=\phi^{-1}$$

Отношение соседних чисел ряда 2-Люка можно задать посредством цепной дроби:

$$\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2+1}}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+1}}}=\frac{7}{17} \qquad (22)$$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+1}}}}=\frac{17}{41}$$

Отношение соседних чисел ряда Люка можно задать посредством цепной дроби:

$$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+2}}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+2}}}=\frac{4}{7}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+2}}}}=\frac{7}{11}$$

Таким образом, мы продемонстрировали аналогию между серебряными и золотыми функциями и тем самым показали, что целый ряд свойств, считавшихся характерными только для З.Ф., проявляются также и у С.Ф.

Прежде чем приступить к обобщению, рассмотрим еще один вариант совмещения квадратной решетки с гиперплоскостью (рис.3). Для характеристики всех вариантов совмещения введем понятие **минимального координатного прямоугольника** решетки (МКП). Таковым считается наименьший прямоугольник, две стороны которого совпадают с координатными осями *OX’* и *OY’*, а две вершины лежат на какой-либо одной ветке гиперболы. Автоматически следует, что размеры сторон такого прямоугольника – целочисленные величины, если за единицу принять сторону квадратной ячейки решетки. Вообще, абсолютный масштаб рисунков во всех случаях задает наименьшая гипербола – $xy = \pm 1$, проходящая через вершины решетки. Но в системе координат *X’OY’* удобно перейти на относительный масштаб, задаваемый стороной квадратной решетки. Тогда координаты *X’* и *Y’* всех вершин решетки получают целочисленное выражение.

Возвращаясь к предыдущим примерам (рис.1, рис.2), обратим внимание, что в случае З.Ф. отношение сторон минимального координатного прямоугольника составляет 1:1, а в случае С.Ф. – 2:1.

Будем обозначать это отношение знаком *k*.

В рассматриваемом случае – рис.3. – $k=3$.

На рис.3 изображен центральный фрагмент решетки.

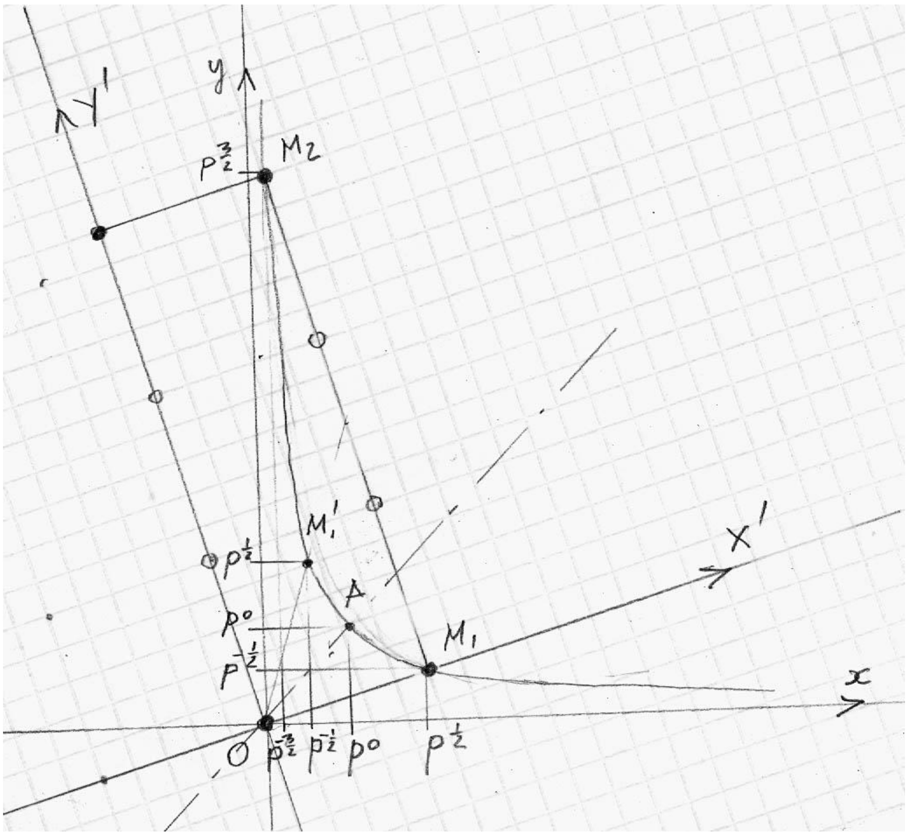

Рис.3. Вариант совмещения квадратной решетки с гиперплоскостью, при котором $k=3$.

Анализ данного варианта полностью аналогичен предыдущему. Поэтому не будем повторять его ход полностью.

Представим без комментариев лишь наиболее характерные результаты. Для обозначения функций примем обозначение *P*; для основания – *p*.

Итак, мы получили:

$p^1 - p^{-1} = 3$ (2)

$p^2 - 3p - 1 = 0$ (3)

$p = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (4)

Свойства степенного ряда p:

$p^n = p \cdot p^{n-1}$ (6)

$p^n = p_{n-2} + 3 \cdot p_{n-1}$ (7)

Ряд 3-Фибоначчи:

... , 10, -3, 1, 0, 1, 3, 10, 33, ... (8)

Ряд 3-Люка

... , 119, -36, 11, -3, 2, 3, 11, 36, 119, ... (9)

Связь между числами ^3F-ряда и ^3L-ряда:

$^3L_n = {}^3F_{n-1} + {}^3F_{n+1}$ (10)

Формула общего члена p-ряда

$p^n = \frac{^3F_n\sqrt{13} + {}^3L_n}{2}$ (11)

Гиперболические p-функции имеют вид:

$P\text{shn} = \frac{p^n - p^{-n}}{2}$, $P\text{chn} = \frac{p^n + p^{-n}}{2}$, $P\text{thn} = \frac{p^n - p^{-n}}{p^n + p^{-n}}$, и т.д. (12)

Координаты X и Y вершин решетки выражаются через P-функции:

$X = a \cdot P\text{chn}$; $Y = a \cdot P\text{shn}$ (13)

Координаты X' и Y' вершин решетки получают выражение:

$X' = a' \cdot P\text{ch}(n+1)$, $Y' = a' \cdot P\text{shn}$ (14)(15)

На основании (7) (16) имеем:

$P\text{ch}(n-2) + 3P\text{sh}(n-1) = P\text{chn}$

$P\text{sh}(n-1) + 3P\text{ch}\ n = P\text{sh}(n+1)$ (20)

Координатами X' и Y' вершин, принадлежащих веткам гипербол, для которых $a' = 1$, будут числа ряда p-Фибоначчи, т.е. 0, 1, 3, 10, 33, 109, ... В частности числам 0, 3, 33, ... соответствует формула $Y' = a' \cdot P\text{sh}(n-1)$, а числам ... , 1, 10, 109, ... – формула $X' = a' \cdot P\text{ch}(n+1)$.

Отношения соседних чисел ряда 3-Фибоначчи можно задать посредством цепной дроби:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}} = \frac{10}{33}$$

$$\ldots\ldots\ldots \tag{21}$$

Для 3-Люка имеем:

$$\frac{1}{3 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{11}$$

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{2}{3}}} = \frac{11}{36}$$

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{2}{3}}}} = \frac{36}{119}$$

$$\ldots\ldots\ldots \tag{22}$$

Таким образом мы показали полную аналогию свойств гиперболических P-функций с З.Ф. и С.Ф.

Наконец, перейдем к обобщению. Идея проста: величине k можно придавать любые значения в виде целых чисел, или целочисленных дробей (напомним, k – отношение сторон прямоугольника, вершины которого совпадают с узлами квадратной решетки).

Выполним анализ общего случая (рис.4). В сущности, $k = \frac{M_1 M_2}{OM_1} = \text{tg}\alpha$.

Для основания и функции примем обозначения $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{U}$ соответственно.

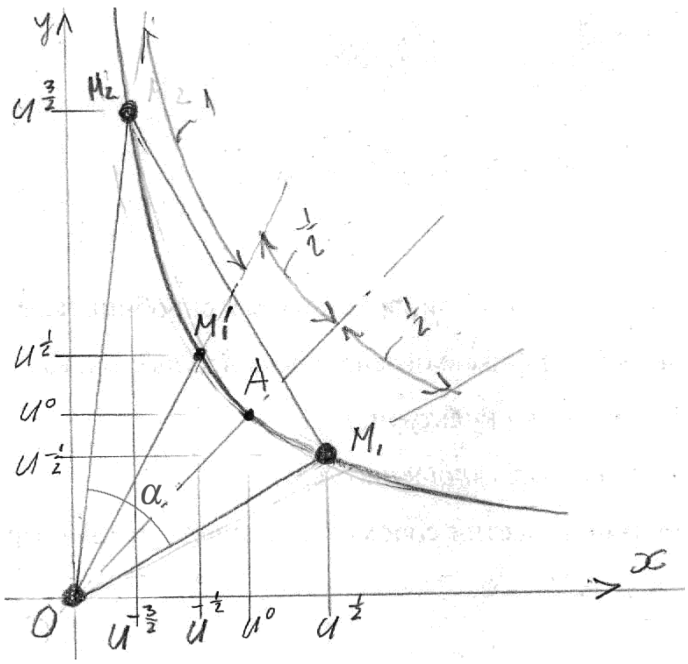

Рис.4. К анализу общего случая.

Исходные данные:

Евклидов угол $M_1OM_2 = \frac{\pi}{2}$;

Гиперболический угол $M_1OA = \frac{1}{2}$;

Гиперболический угол $AOM_1' = \frac{1}{2}$;

Гиперболический угол $M_1OM_2 = 2$;

Определяем: $(OM_1)^2 = u^{1} + u^{-1}$;

$(OM_2)^2 = u^{3} + u^{-3}$;

$(M_1M_2)^2 = (u^{3} + u^{-3}) - (u^{1} + u^{-1})$

Составляем уравнение $\frac{(u^3+u^{-3})-(u^1+u)}{u^1+u^{-1}} = k^2$

$u^{2} - 1 + u^{-2} - 1 = k^2$

$u^{1} - u^{-1} = k$ (2)

$u^2 - ku - 1 = 0$ (3)

Получаем:

$u = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ (4)

Таким образом, мы имеем первые важные обобщения. В простейшем частном случае, т.е. при $k = 1$, зависимостью (2) иллюстрируется замечательное свойство золотого сечения:

$$\phi - \frac{1}{\phi} = 1.$$

Не менее интересна и общая форма уравнения (3), дающая в результате его решения выражение основания u.

Обратим внимание, что при $k = 2$, мы получили выражение основания q в сокращенном виде: $q = \sqrt{2} + 1$. Теперь понятно, что записав q в виде $q = \frac{\sqrt{8}+2}{2}$, мы привели его выражение к унифицированной форме.

Теперь рассмотрим свойства обобщенного степенного ряда u^{n}.

По аналогии с формулами (6) и (7):

$$\mathrm{u^n = u \cdot u^{n-1}} \tag{6}$$

$$\mathrm{u^n = u^{n-2} + k \cdot u^{n-1}} \tag{7}$$

$$k = \frac{u_{\mathrm{n+1}} - u_{\mathrm{n-1}}}{u_{\mathrm{n}}}. \tag{23}$$

Согласно структуре формул (11) записываем выражение <u>общего члена *u*-ряда</u>:

$$u^{\mathrm{n}} = \frac{{}^{\mathrm{k}}F_{\mathrm{n}}\sqrt{k^2+4} \; + \; {}^{\mathrm{k}}L_{\mathrm{n}}}{2} \tag{11}$$

где ${}^{\mathrm{k}}F_{\mathrm{n}}$ и ${}^{\mathrm{k}}L_{\mathrm{n}}$ – числа обобщенных рядов k-Фибоначчи и k-Люка, а $k^2 + 4$ – дискриминант обобщенного квадратного уравнения (3).

Возникает вопрос о выражении ${}^{\mathrm{k}}F_{\mathrm{n}}$ и ${}^{\mathrm{k}}L_{\mathrm{n}}$.

Учитывая свойства (6) и (7), которые распространяются на обобщенные ряды k-Фибоначчи и k-Люка, составлены таблицы выражений членов этих рядов через величину k.

Таблица 1. Выражения чисел рядов *k*-Фибоначчи.

${}^kF_1$	1											
${}^kF_2$		k										
${}^kF_3$	1	+	k^2									
${}^kF_4$		2k	+	k^3								
${}^kF_5$	1	+	$3k^2$	+	k^4							
${}^kF_6$		3k	+	$4k^3$	+	k^5						
${}^kF_7$	1	+	$6k^2$	+	$5k^4$	+	k^6					
${}^kF_8$		4k	+	$10k^3$	+	$6k^5$	+	k^7				
${}^kF_9$	1	+	$10k^2$	+	$15k^4$	+	$7k^6$	+	k^8			
${}^kF_{10}$		5k	+	$20k^3$	+	$21k^5$	+	$8k^7$	+	k^9		
${}^kF_{11}$	1	+	$15k^2$	+	$35k^4$	+	$28k^6$	+	$9k^8$	+	k^{10}	
${}^kF_{12}$		6k	+	$35k^3$	+	$46k^5$	+	$36k^7$	+	$10k^9$	+	k^{11}

Примеры

K=	1	2	3
${}^kF_1$	1	1	1
${}^kF_2$	1	2	3
${}^kF_3$	2	5	10
${}^kF_4$	3	12	33
${}^kF_5$	5	29	109
${}^kF_6$	8	70	360
${}^kF_7$	13	169	
${}^kF_8$	21		
${}^kF_9$	34		

Таблица 2. Выражения чисел рядов *k*-Люка, полученные на основе таблицы *k*-Фибоначчи с учетом зависимости: ${}^kL_n = {}^kF_{n-1} + {}^kF_{n+1}$

${}^kL_1$		k										
${}^kL_2$	2	+	k^2									
${}^kL_3$		3k	+	k^3								
${}^kL_4$	2	+	$4k^2$	+	k^4							
${}^kL_5$		5k	+	$5k^3$	+	k^5						
${}^kL_6$	2	+	$9k^2$	+	$6k^4$	+	k^6					
${}^kL_7$		7k	+	$14k^3$	+	$7k^5$	+	k^7				
${}^kL_8$	2	+	$16k^2$	+	$20k^4$	+	$8k^6$	+	k^8			
${}^kL_9$		9k								k^9		
${}^kL_{10}$	2										k^{10}	

Примеры

K=	1	2	3
${}^kL_1$	1	2	3
${}^kL_2$	3	6	11
${}^kL_3$	4	14	36
${}^kL_4$	7	34	119
${}^kL_5$	11	82	
${}^kL_6$	18		
${}^kL_7$	29		

В данных таблицах любой числовой коэффициент, кроме находящихся в первой колонке, а также, кроме равных 1, является суммой двух ближайших, один из которых взят сверху по вертикали, а другой – сверху слева по диагонали. Например:

	6
15	
	21

6 + 15 = 21

	1
7	
	8

1 + 7 = 8

Запишем выражения обобщенных гиперболических функций.

$$U\text{shn} = \frac{U^{n}-U^{-n}}{2}, \quad U\text{chn} = \frac{U^{n}+U^{-n}}{2}, \quad U\text{thn} = \frac{U^{n}-U^{-n}}{U^{n}+U^{-n}} \qquad (12)$$

Для частных случаев удобна запись с указанием $\boldsymbol{k}$. Например, для золотых функций вместо *G*shn и *G*chn можно записать ${}^{1}U$shn и ${}^{1}U$chn; для серебряных – ${}^{2}U$shn и ${}^{2}U$chn.

Обобщаем формулы координат *X* и *Y* вершин решетки:

$X = a \cdot U\text{chn}$; $Y = a \cdot U\text{shn}$, (13)

а также формулы координат *X’* и *Y’* вершин решетки:

$X' = a' \cdot U\text{ch(n+1)}$; $Y' = a' \cdot U\text{shn}$ (14)(15)

В обобщенных формулах (20) появляется величина $\boldsymbol{k}$:

$U\text{chn} + k \cdot U\text{sh(n+1)} = U\text{ch(n+2)}$

$U\text{shn} + k \cdot U\text{ch(n+1)} = U\text{sh(n+2)}$ (20)

Координатами вершин, принадлежащих веткам гипербол радиуса a'=1, будут числа ряда *k*-Фибоначчи. При этом числам с четными порядковыми номерами соответствует формула синуса $Y' = a' \cdot U\text{shn}$; а числам с нечетными порядковыми номерами – формула косинуса $X' = a' \cdot U\text{ch(n+1)}$.

В общем случае справедлива формула константы рекуррентного ряда:

$$\left| U_{\mathrm{n}}^2 + k \cdot U_{\mathrm{n}} \cdot U_{\mathrm{n+1}} - U_{\mathrm{n+1}}^2 \right| = C \qquad (17)$$

Напомним, $C = (a')^2$

Интересно отметить, что для множества рядов *k*-Фибоначчи константа *C* равна единице, а для всевозможных рядов *k*-Люка константа *C* равна дискриминанту k^2+4 обобщенного квадратного уравнения.

Например, для ряда 1-Фибоначчи:

$F_4 = 3$; $F_5 = 5$; $\left| 3^2 + 3 \cdot 5 - 5^2 \right| = 1$

для ряда 2-Фибоначчи:

${}^{2}F_3 = 5$; ${}^{2}F_4 = 12$; $\left| 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 12 - 144 \right| = 1$

для ряда 3-Фибоначчи:

${}^{3}F_3 = 10$; ${}^{3}F_4 = 33$; $\left| 10^2 + 10 \cdot 3 \cdot 33 - 33^2 \right| = 1$

для ряда 1-Люка:

${}^{1}L_2 = 3$; ${}^{1}L_3 = 4$; $\left| 3^2 + 3 \cdot 4 - 4^2 \right| = 5 = 1^2 + 4$

для ряда 2-Люка:

${}^{2}L_2 = 6$; ${}^{2}L_3 = 14$; $\left| 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 14 - 14^2 \right| = 8 = 2^2 + 4$

для ряда 3-Люка:

$^3L_1 = 3$; $^3L_2 = 11$; $\left| 3^2 + 3\cdot 3\cdot 11 - 11^2 \right| = 13 = 3^2 + 4$

Наконец, обратим внимание на возможность обобщения цепных дробей, выражающих отношения соседних чисел рядов k-Фибоначчи и k-Люка.

Для рядов k-Фибоначчи цепная дробь имеет вид:

$$\ldots + \cfrac{1}{\mathrm{k} + \cfrac{1}{\mathrm{k} + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{\mathrm{k} + \cfrac{1}{k}}}}} \tag{21}$$

Для рядов k-Люка:

$$\ldots + \cfrac{1}{\mathrm{k} + \cfrac{1}{\mathrm{k} + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{\mathrm{k} + \cfrac{1}{\mathrm{k} + \cfrac{2}{k}}}}}} \tag{22}$$

Мы перечислили, пожалуй, все характерные общие свойства функций определенного нами множества.

Итак, данной классификацией определено множество классов гиперболических функций, соответствующее множеству вариантов совмещения квадратной решетки с гиперплоскостью: всякому классу функций однозначно соответствует вариант совмещения и наоборот.

Критерием класса функций является коэффициет k, который в нашей классификации выражается целым числом или целочисленной дробью, что вытекает из определения k: в геометрическом смысле величина k – это соотношение сторон координатного прямоугольника, вершины которого являются узлами квадратной решетки с ячейками 1x1.

При k=1 получаем вариант совмещения, которому соответствуют золотые функции.

В принципе, числу *k* можно придавать иррациональные значения. Но тогда исключается возможность такого совмещения квадратной решетки с гиперплоскостью, при котором путем гиперболического поворота осуществимо симметрическое преобразование решетки.

В нашем случае (т.е. при целочисленных выражениях *k*) гиперболический поворот приводит к периодическому самосовмещению квадратной решетки, а гиперболические функции, описывающие координаты *X'* и *Y'* движущихся вершин решетки, периодически принимают целочисленные значения.

Заметим, при *k*=0 симметрическое преобразование квадратной решетки также невозможно (рис.5).

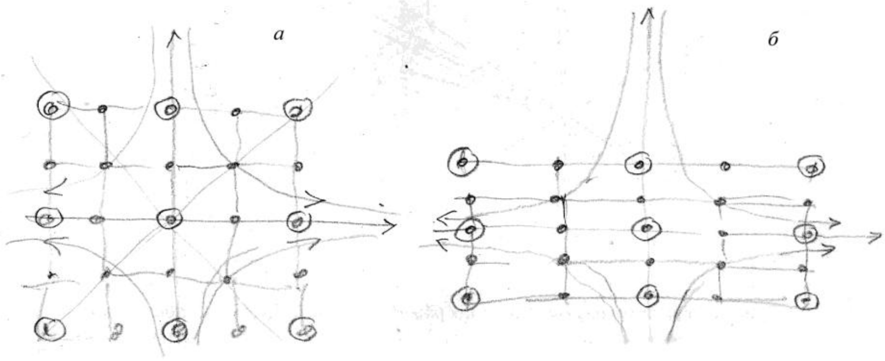

Рис.5. При *k*=0 гиперболический поворот приводит к невозвратной деформации квадратной решетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).

2. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: PrincetonUniversity Press, 1999.

3. А.П. Стахов, Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm

4. Alexey Stakhov, Samuil Aranson, Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem, Applied Mathematics, 2011, 2, 74-84 doi:10.4236/am.2011.21009 Published Online January 2011 (http://www.SciRP.org/journal/am)

5. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993 г.

6. О.Я.Боднар, Динамическая симметрия, Ин-т прикл.проблем.механики и математики; Львов, 1990.

7. О.Я.Боднар, Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Свит, Львов, 1993.