С.Л. Василенко

Дважды квадратичные числовые структуры

Один ум хорошо, а
... два сапога – пара.
И оба валенки.
(по мотивам русских пословиц)

В работе [1] представлен любопытный материал по оценке корня-аттрактора усечённой квадратичной модели $x^2 = mx + 1$ с единичным свободным коэффициентом.

Отличительной особенностью является организация фрактального (рекуррентного) механизма формирования оснований квадратичных пропорций на базе задающего коэффициента m с использованием числа 2.

Нет сомнений в том, что автор провёл свои исследования самостоятельно.

Хотя используемые им основообразующие числовые последовательности достаточно хорошо и давно известны в теории чисел [2–5]:

$$z_n = z_{n-1}^2 - 2 .$$

Целью настоящей статьи является развитие и систематизация обозначенного подхода, что в определённой мере корреспондируется с анализом, проведенным ранее в работе [6] для квадратичной задачи.

Рассмотрим квадратное уравнение общего вида $x^2 = mx + q$ с положительным корнем

$$\lambda = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4q}}{2} .$$

Ему соответствуют две наиболее представительные двучленно-аддитивные рекурсии с натуральными индексами $n = 1, 2, 3\ldots$:

- обобщённая квадратная последовательность Фибоначчи $\mathrm{F}_{n+1} = m\mathrm{F}_n + q\mathrm{F}_{n-1}$ с парой начальных условий $(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1) = (0,\ 1)$ и аналитической формой [6, 7]

$$\mathrm{F}_n = \frac{\lambda^n - \left(-\tilde{\lambda}\right)^{-n}}{\sqrt{m^2 + 4q}} ; \qquad (1)$$

- обобщённая квадратичная последовательность Люка $\mathrm{L}_{n+1} = m\mathrm{L}_n + q\mathrm{L}_{n-1}$ с парой начальных условий $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1) = (2,\ m)$ и явной зависимостью [6, 7]

$$\mathrm{L}_n = \lambda^n + \left(-\tilde{\lambda}\right)^{-n} , \qquad (2)$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda/q$ – корень, нормированный относительно коэффициента (свободного члена) q.

Обозначения F, L выполнены специально прямым шрифтом (не курсивом), чтобы отличать от обычных чисел Фибоначчи F_k и Люка L_k, формируемых на основе простейшей модели $x^2 = x + 1$.

Создадим выборочный ряд, состоящий из отдельных элементов числовой последовательности L_n с индексами 2^n, то есть $\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_4, \mathrm{L}_8\ \ldots$:

$$a_n = \mathrm{L}_{2^n} = \lambda^{2^n} + \tilde{\lambda}^{-2^n} . \qquad (3)$$

Здесь знак "минус" опущен вследствие возведения величины $\tilde{\lambda}$ в чётную степень.

Таким образом, мы получили, условно говоря, дважды квадратичные числовые структуры.

С одной стороны, они соотнесены с квадратным уравнением. Одновременно выделены элементы ряда только с индексами "два в степени", то есть 2^n.

> К слову, иногда число называют *дважды квадратным*, если оно является квадратом натурального числа и из его цифр можно составить большее число, также представимое квадратом натурального числа.
>
> Например, $256 = 16^2$ – дважды квадратное число, поскольку $625 = 25^2$.

Установлено, что в общем виде рекуррентная форма для числовой последовательности a_n имеет вид:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2q^{2^n}$$

с начальным значением $a_1 = m^2 + 2q$ и индексами $n = 1, 2, 3\ldots$

Элементы данного ряда могут быть также определены с привлечением элементов обобщённых последовательностей Фибоначчи F_n, генерируемых согласно (1):

$$a_n \;=\; q \cdot \mathrm{F}_{2^n - 1} + \mathrm{F}_{2^n + 1} \;=\; \frac{\mathrm{F}_{2^{n+1}}}{\mathrm{F}_{2^n}}.$$

Кроме того, при $q = 1$ справедлива формула вычисления a_n через обычный и обратный гиперболические косинусы:

$$a_n = 2 \cdot \mathrm{ch}\left[2^n \,\mathrm{arch}\left(\frac{\sqrt{m^2 + 2^2}}{2}\right)\right].$$

Для значений коэффициентов $m, q \geq 1$ корень также больше единицы: $\lambda > 1$.

Поэтому целочисленные члены последовательности a_n согласно (3) стремятся к ближайшему целому λ^{2^n}.

Отсюда следует $\lambda \approx \sqrt[2^n]{a_n}$.

Это и есть основа формулы для частного случая $q = 1$, рассмотренного в работе [1],

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2^n]{\left(\left(\left(\left(m^2 + 2\right)^2 - 2\right)^2 - 2\right)^2 - \ldots - 2\right)^2}, \qquad (4)$$

где количество скобок или степеней-двоек равно $n-1$.

Соотношение (4) выглядит довольно эффектно, выражая двоичный характер записи для корней алгебраического уравнения второго порядка.

Однако трудно согласиться с мнением [1], что «такая запись подчеркивает всепроникающую роль числа 2 в различные процессы» мироздания.

Дело в том, что к данной форме мы пришли не от изучения конкретных природных явлений.

Она сформировалась искусственно. В результате выборочного выделения членов обобщённой квадратичной последовательности Люка $\{\mathrm{L}\}$ с порядковыми элементами 2^n.

То есть причинно-следственная цепочка-связь де-факто "прочитана" в зеркальном отображении: от математической абстракции – к поискам адекватного отображения реальности, которую ещё предстоит выделить в качестве изучаемого объекта.

Ничего нет удивительного также и в том, что образованный таким образом ряд a_n быстро сходится к своему аттрактору λ, поскольку элементы обобщённой квадратичной последовательности Люка (2) согласно форме (3) следуют с постоянно возрастающими интервалами в соответствии с их степенной индексацией 2^n.

В частном случае $(m, q) = (1,\ 2)$ или $x^2 = x + 2$ последовательность a_n образует числа Ферма $a_n = 2^{2^n} + 1 = (a_{n-1} - 1)^2 + 1 = a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_0 + 2$:

$$3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65537,\ 4294967297,\ 18446744073709551617, \ldots$$

Их исследование начал ещё Ферма, предположив, что все они простые[1].

Однако эта гипотеза была опровергнута Эйлером (1732), который нашёл разложение 4294967297 = 641·6700417.

<u>Константе золотого сечения</u> $\lambda = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ соответствует уравнение $x^2 = x + 1$.

Адекватные представления последовательности a_n в этом случае приобретают вид:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2, \quad a_1 = 3,$$

$$a_n = L_{2^n} = \Phi^{2^n} + \Phi^{-2^n} \approx \Phi^{2^n},$$

$$a_n = F_{2^{n+1}} \big/ F_{2^n},$$

$$a_n = F_{2^n - 1} + F_{2^n + 1},$$

где F_k – числа Фибоначчи: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...; L_k – числа Люка: 2, 1, 3, 4, 7, 11, ...

Начальные значения ряда a_n имеют вид:

$$3,\ 7,\ 47,\ 2207,\ 4870847,\ 23725150497407,\ 562882766124611619513723647, \ldots$$

Собственно и все основные выкладки.

Вместо заключения.

Некоторые авторы склонны думать, что квадратичное уравнение $x^2 = mx + q$ способно к генерации гармоничных структур-образований.

Виктор Шенягин, в частности, видит в механизме-процессе (4) «новое прочтение сути *s*-пропорций и их роли в структурно-объектном формировании Мироздания» [1].

Возможно, и так. Хотя, на наше разумение, данная позиция всё-таки больше тяготеет к свободным "фантазиям на заданную тему".

Тем не менее, квадратично-модельный принцип довольно основательно упрочил свои корни в описании окружающего мира [8–10].

Достаточно сказать, что фундаментальные математические константы (π, *e*, Φ) имеют общее "квадратичное происхождение", которое порождают кривые второго порядка: окружность, гипербола и парабола.

---

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number.

Наиболее отчетливо такое связующее триединство проявляется в обычных конических сечениях.

Литература:

1. *Шенягин В.П.* Механизм формирования *s*-пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17194, 08.01.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322112.htm.

2. *Aho A.V., Sloane N.J.A.* Some Doubly Exponential Sequences // Fibonacci Quarterly. – 1970. – Vol. 11. – P. 429–437. – http://www2.research.att.com/~njas/doc/doubly.html.

3. *Dickson L. E.* History of the Theory of Numbers. Carnegie Institute Public. 256, Washington, DC, 1919. – Vol. 1. – p. 397.

4. *Hardy G.H., Wright E.M.* An Introduction to the Theory of Numbers. 3rd ed., Oxford Univ. Press, 1954. – p. 223.

5. *Mendes France M., Poorten A.J.* From geometry to Euler identities // Theoret. Comput. Sci. – 65 (1989). – P. 213–220.

6. *Василенко С.Л.* Эквивалентные формы квадратичных последовательностей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17134, 21.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322097.htm.

7. *Василенко С.Л.* Аналитика "золотых" пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.

8. *Василенко С.Л.* Триномиально-квадратичный код мироздания // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15995, 12.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161675.htm.

9. *Василенко С.Л.* Квадратичная природа золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16049, 20.08.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161692.htm.

10. *Василенко С.Л.* Базовое тождество математических основ гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16069, 10.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm.