И.С. Ткаченко
М.И. Ткаченко

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА В ИРРАЦИОНАЛЬНО-ТРОИЧНОЙ СИСТЕМЕ, ПОСТРОЕННОЙ НА СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ФИБОНАЧЧИ И ФУНКЦИЙ ЛЮКА

Аннотация. Вопрос о возможности представления натурального числа в виде сумм чисел последовательности Фибоначчи возник, как один из вариантов, в связи с созданием Фибоначчи-компьютера. Это в определенном смысле, является в последнее время особенно актуальным и интересным для математиков и для кибернетиков, создающих устройства преобразования сигналов. Провести исследование в этом направлении на основе свойств функций Фибоначчи и функций Люка возникло у нас еще в прошлом веке. Полученные результаты представлены в работе [1], а с учетом последних усовершенствований представляем их вниманию читателей в таком вот варианте.

Введение. В статье «Фибоначчиева система счисления» [Wikipedia.org] утверждается, что «Прямой связи между представлением натуральных чисел в системе золотого сечения и в Фибоначчиевой не имеется». Вместе с этим отметим, что Д. Бергман в 1957 году предпринял попытку представить натуральное число через систему счисления с иррациональным основанием ($\phi = 1{,}618033989 \ldots$ — число Фидия)[goldenmuseum.com]. К этому же добавим, что согласно теореме Zeckendorf [Wikipedia.org/…/Zeckendorf's theorem] для натурального числа N существует сумма чисел Фибоначчи.

$$N = \sum_{i=0}^{k} F_{n_i}, \tag{1}$$

где F_{n_i}— есть n_i-е число Фибоначчи, и при этом

$n_i \geq 2,\ n_{i+1} > n_i + 1$, то есть в (1) не включается два последовательных числа.

Указывается также, что теорема состоит из двух частей:

1. *Существование*: каждое натуральное число N имеет представление Zeckendorf (1).

2. *Уникальность*: нет натурального N, которое имеет два различных представления Zeckendorf (1).

При представлении числа N, удовлетворяющего условиям теоремы, используется так называемый *«жадный алгоритм».*

Цель исследования. Проанализировав свойства последовательностей чисел Фибоначчи и чисел Люка, нами были введены соответствующие им функции [1, 2] по аналогии с гиперболическими функциями:

$$1)\ sft = \frac{\phi^{2t} - \phi^{-2t}}{\sqrt{5}}, \qquad (2)$$
$$2)\ cft = \frac{\phi^{2t+1} + \phi^{-2t-1}}{\sqrt{5}}$$

и

$$3) slt = \phi^{2t+1} - \phi^{-2t-1}, \qquad (2)$$
$$4)\ cft = \phi^{2t} + \phi^{-2t},$$

которые моделируют при целочисленных значениях t, разбиение их на две пары последовательностей (табл. 1).

Таблица 1

Значения функций Фибоначчи и функций Люка для целочисленного аргумента

$-i$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
sft	-21	-8	-3	-1	0	1	3	8	21
cft	13	5	2	1	2	5	13	34	89
slt	-29	-11	-4	-1	1	4	11	29	76
clt	47	18	7	3	2	3	7	18	47

Таким образом, мы можем утверждать, что натуральное число N может быть представлено в виде суммы соответствующих функций Фибоначчи и функций Люка целочисленного аргумента:

$$N = \sum_{\forall i} a_i sf[t_i],$$

$$N = \sum_{\forall i} a_i cf[t_i];$$

$$N = \sum_{\forall i} a_i sl[t_i],$$
$$N = \sum_{\forall i} a_i cl[t_i] \tag{3}$$

Это означает, что конкретное натуральное число N может иметь четыре представления.

Метод исследования. В решении задачи представления натурального числа N в виде (3) необходимо находить значение номера t ближайшего значения функций(2) к числу N, что возможно реализовать, введя понятие обратных функций Фибоначчи и обратных функций Люка, то есть если функция синуса Фибоначчи задана в виде

$x = sft = \frac{\phi^{2t} - \phi^{-2t}}{\sqrt{5}}$,

тогда

$\phi^{4t} - \sqrt{5}\phi^{2t} - 1 = 0$,

откуда

$\phi^{2t} = e^{t2\ln\phi}$,

а значит

$\phi^{2t} = \frac{x\sqrt{5} \pm \sqrt{5x^2+4}}{2} = e^{t2\ln\phi}$,

следовательно, $t = asfx$ — обратный синус Фибоначчи, то есть

$$1)\ asfx = \left[\frac{1}{2\ln\phi}\ln\left|\frac{x\sqrt{5} \pm \sqrt{5x^2+4}}{2}\right|\right], \tag{4.1}$$

аналогично получим обратный косинус Фибоначчи

$$2)\ acfz = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln\phi}\ln\left|\frac{z\sqrt{5} \pm \sqrt{5z^2-4}}{2}\right| - 1\right)\right], \tag{4.2}$$

а также обратный синус Люка

3) $asl v = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln \phi}\ln\left|\frac{v\pm\sqrt{v^2+4}}{2}\right| - 1\right)\right]$ (4.3)

и обратный косинус Люка

4) $aclu = \left[\frac{1}{2\ln \phi}\ln\left|\frac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2}\right|\right].$ (4.4)

Здесь квадратные скобки выполняют функцию операции определения целой части соответствующего в них числа.

Основные результаты. Натуральное число N может быть представлено как сумма произведений коэффициента a на функционал $F(t)$ целочисленного аргумента t

$N = \sum_{\forall i} a_i F_i(t),$ (5)

где

$a \in \{0,1,2\}$, $F(t) \in \{sft, cft, slt, clt\}.$ (6)

Это свидетельствует о том, что натуральное число N может быть представлено четырьмя вариантами как сумма произведения коэффициента $a \in \{0,1,2\}$ отдельно на каждую из функций Фибоначчи (sft, cft) и Люка (slt, clt) целочисленного аргумента t.

Реализуем этот процесс в соответствии со следующим алгоритмом.

Определяем для числа N_0 наибольшее значение целочисленного аргумента t, соответствующей функции (2) функционала (6), согласно с ее представлением как обратной (4.1–4.4) функционала

$aF(t) \in \{asfx, acfz, aslu, aclv\},$ (7)

где x, z, u, v заменяем на значение N_0.

2. Для найденного аргумента $[t]$ определяем значение соответствующей функции функционала $F(t)$ (6).

3. Находим разность между числом N_0 и вычисленным значениям соответствующей функции функционала $F(t)$ (6) и обозначим ее как N_1:

$$N_1 = N_0 - F(t) \quad (8)$$

4. Проверяем выполнение таких условий:

4.1. Если $N_1 < F(t)$, то $a_1 = 1$;

4.2. Если $N_1 \geq F(t)$, то $a_1 = 2$

и тогда

$$N_1 = N_0 - 2 \cdot F(t) \quad (9)$$

4.3. Если $N_1 = 0$, то вычисления прекращаются, а в противном случае переходим к пункту 1 заменяя индекс 0 на 1,то есть обеспечиваем цикличность вычислений через изменение индекса: $i = i + 1$, и тогда выполняем снова те же операции со значением N_{i+1} вместо N_i .

Натуральное число N может быть представлено в виде (5) по одному из четырех вариантов разложения или каждому из них.

Рассмотрим реализацию данного алгоритма на конкретном примере.

Пример. Пусть натуральное число $N_0 = 256$ необходимо представить через синус Фибоначчи (то есть числами последовательности $A000045$ в $OEIS$ с ее нечетными номерами).

Выполняем первый цикл представления в соответствии с описанным алгоритмом для функции $x = sft$.

1. $$[t_1] = \left[\frac{1}{2\ln\phi}\ln\left|\frac{256\sqrt{5}+\sqrt{5\cdot 256^2+4}}{2}\right|\right] = 6.$$
2. $$sf6 = \frac{\phi^{2\cdot 6} - \phi^{-2\cdot 6}}{\sqrt{5}} = 144.$$
3. $$N_1 = 256 - 144 = 112.$$
4. $a_1 = 1$,

так как $N_1 < sf6$, то есть $112 < 144$, $N_1 \neq 0$, тогда $N_1 = 112$.

Переходим к пункту 1 и выполняем второй цикл в соответствии с предложенным алгоритмом.

1. $$[t_2] = \left[\frac{1}{2\ln\phi}\ln\left|\frac{112\sqrt{5}+\sqrt{5\cdot 112^2+4}}{2}\right|\right] = 5.$$
2. $$sf5 = \frac{\phi^{2\cdot 5} - \phi^{-2\cdot 5}}{\sqrt{5}} = 55.$$
3. $$N_2 = 112 - 55 = 57.$$
4. $a_2 = 2$,
   так как $N_2 > sf5$, то есть $57 > 55$, $N_2 = 112 - 2\cdot 55 = 2$.
   $N_2 \neq 0$, тогда $N_2 = 2$.

Выполним следующий, третий цикл в соответствии с предложенным алгоритмом.

1. $$[t_3] = \left[\frac{1}{2\ln\phi}\ln\left|\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{5\cdot 2^2+4}}{2}\right|\right] = 1.$$
2. $$sf1 = \frac{\phi^{2\cdot 1} - \phi^{-2\cdot 1}}{\sqrt{5}} = 1.$$
3. $$N_3 = 2 - 1 = 1.$$
4. $a_3 = 2$,
   так как $N_3 = sf1$, то есть $1 = 1$.

$N_4 = 2 - 2\cdot 1 = 0$.

$$N_4 = 0.$$

Следовательно, представление числа $N_0 = 256$ в разложении его по функции синус Фибоначчи завершено, и оно принимает такой вид:

$$256_{10} = 1\cdot sf6 + 2\cdot sf5 + 2\cdot sf1 = 1\cdot 144 + 2\cdot 55 + 2\cdot 1.$$

В случае, если задать разрядную сетку чисел Фибоначчи, соответствующих целочисленному значению аргумента синуса Фибоначчи, то получим следующее представление числа $N_0 = 256$(табл. 2):

Таблица 2

Представление числа $N_0 = 256$ в разложении по синусам Фибоначчи

t	8	7	6	5	4	3	2	1	0
sft	987	377	144	55	21	8	3	1	0
256	0	0	1	2	0	0	0	2	0

Покажем также, что представление натурального числа $N_0 = 256$ есть не единственным на множестве чисел Фибоначчи.

Выполним представление числа $N_0 = 256$ как сумму косинусов Фибоначчи целочисленного аргумента по созданному нами алгоритму.

1. $$[t_1] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln\phi}\ln\left|\frac{256\sqrt{5}+\sqrt{5\cdot 256^2-4}}{2}\right| - 1\right)\right] = 6.$$
2. $$cf6 = \frac{\phi^{2\cdot 6+1} + \phi^{-2\cdot 6-1}}{\sqrt{5}} = 233.$$
3. $$N_1 = 256 - 233 = 23.$$
4. $a_1 = 1$,
   так как $N_1 < cf6$, то есть $23 < 233$.

$N_1 \neq 0$, тогда $N_1 = 23$.

Переходим к пункту 1 и выполняем соответствующие действия с числом $N_1 = 23$.

1. $$[t_2] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln\phi}\ln\left|\frac{23\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5\cdot 23^2-4}}{2}\right| - 1\right)\right] = 3.$$
2. $$cf3 = \frac{\phi^{2\cdot 3+1} + \phi^{-2\cdot 3-1}}{\sqrt{5}} = 13.$$
3. $$N_2 = 23 - 13 = 10.$$
4. $a_2 = 1$,
   так как $N_2 < cf3$, то есть $10 < 13$.

$N_2 \neq 0$, тогда $N_2 = 10$.

Переходим к пункту 1 и выполняем соответствующие действия с числом $N_2 = 10$.

1. $$[t_3] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln\phi}\ln\left|\frac{10\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5\cdot 10^2-4}}{2}\right| - 1\right)\right] = 2.$$
2. $$cf2 = \frac{\phi^{2\cdot 2+1} + \phi^{-2\cdot 2-1}}{\sqrt{5}} = 5.$$
3. $N_3 = 10 - 5 = 5$.
4. $a_3 = 2$,
   так как $N_3 = cf2$, то есть $5 = 5$.

$N_4 = 10 - 2\cdot 5 = 0$,

$N_4 = 0$.

Таким образом, представление числа $N_0 = 256$ в разложении по функции косинуса Фибоначчи завершено, и оно принимает вид

$$256_{10} = 1\cdot cf6 + 1\cdot cf3 + 2\cdot cf2.$$

Таблица 3

Представление числа $N_0 = 256$ в разложении по синусам Фибоначчи

t	7	6	5	4	3	2	1	0
cft	610	233	89	34	13	5	2	1
256	0	1	0	0	1	2	0	0

Итак, имеем, что одно и то же натуральное число $N_0 = 256$, которое может быть представлено двумя способами с помощью элементов последовательности чисел Фибоначчи (A000045 в OEIS).

$$256_{10} = 1 \cdot sf6 + 2 \cdot sf5 + 2 \cdot sf1 = 1 \cdot 144 + 2 \cdot 55 + 2 \cdot 1 = 1200020_{sf}$$

и

$$256_{10} = 1 \cdot cf6 + 1 \cdot cf3 + 2 \cdot cf2 = 1 \cdot 233 + 1 \cdot 13 + 2 \cdot 5 = 1001200_{cf}$$

Полученный результат опровергает второе утверждение теоремы Zeckendorf об ее уникальности.

Вместе с этим отметим, что возможно существование и еще двух вариантов представления натурального числа через элементы последовательности чисел Люка(A000032 в OEIS) на основе нашего алгоритма.

1. $$[t_1] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln\phi}\ln\left|\frac{256+\sqrt{256^2+4}}{2}\right| - 1\right)\right] = 5.$$
2. $$sl5 = \phi^{2\cdot5+1} - \phi^{-2\cdot5-1} = 199.$$
3. $$N_1 = 256 - 199 = 57.$$
4. $a_1 = 1$,
   так как $N_1 < sl5$, то есть $57 < 199$.

$N_1 \neq 0$, тогда $N_1 = 57$.

Переходим к пункту 1 с числом $N_1 = 57$:

1. $$[t_2] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln\phi}\ln\left|\frac{57+\sqrt{57^2+4}}{2}\right| - 1\right)\right] = 3.$$
2. $$sl3 = \phi^{2\cdot3+1} - \phi^{-2\cdot3-1} = 29.$$
3. $$N_2 = 57 - 29 = 28.$$
4. $a_2 = 1$,
   так как $N_2 < sl3$, то есть $28 < 29$.

$N_2 \neq 0$, тогда $N_2 = 28$.

Переходим к пункту 1 с числом $N_2 = 28$:

1. $$[t_3] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln\phi}\ln\left|\frac{28+\sqrt{28^2+4}}{2}\right| - 1\right)\right] = 2.$$
2. $$sl2 = \phi^{2\cdot2+1} - \phi^{-2\cdot2-1} = 11.$$
3. $$N_3 = 28 - 11 = 17.$$
4. $a_3 = 2$,
   так как $N_3 > sl2$, то есть $17 > 11$.

$N_4 = 28 - 2 \cdot 11 = 6$.

$N_4 \neq 0$.

Переходим к пункту 1 при $N_4 = 6$:

1. $$[t_4] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln\phi}\ln\left|\frac{6+\sqrt{6^2+4}}{2}\right| - 1\right)\right] = 1.$$

2. $$sl1 = \phi^{2\cdot 1+1} - \phi^{-2\cdot 1-1} = 4.$$
3. $N_5 = 6 - 4 = 2.$
4. $a_4 = 1,$
так как $N_5 < sl1$, то есть $2 < 4$.
$$N_5 = 6 - 4 = 2.$$

$N_5 \neq 0.$

Переходим к пункту 1 при $N_5 = 2$:

1. $$[t_5] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln\phi}\ln\left|\frac{2+\sqrt{2^2+4}}{2}\right| - 1\right)\right] = 0$$
2. $$sl0 = \phi^{2\cdot 0+1} - \phi^{-2\cdot 0-1} = 1$$
3. $$N_6 = 2 - 1 = 1$$
4. $a_5 = 2,$
так как $N_5 = sl0$, то есть $1 = 1$.

$N_6 = 2 - 2 \cdot 1 = 0.$

$N_6 = 0.$

Следовательно, натуральное число $N_0 = 256$ в разложении его по функции синуса Люка завершено, и оно принимает вид:

$$256_{10} = 1 \cdot sl5 + 1 \cdot sl3 + 2 \cdot sl2 + 1 \cdot sl1 + 2 \cdot sl0 =$$
$$= 1 \cdot 199 + 1 \cdot 29 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1;$$

а также закодировано через синус Люка (табл. 4).

Таблица 4

Представление числа $N_0 = 256$ в разложении по синусам Люка

t	6	5	4	3	2	1	0
slt	521	199	76	29	11	4	1
256		1	0	1	2	1	2

Наконец, осуществим разложение натурального числа $N_0 = 256$ по косинусам Люка в соответствии с предложенным алгоритмом.

1. $$[t_1] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln\phi}\ln\left|\frac{256+\sqrt{256^2-4}}{2}\right|\right)\right] = 5.$$
2. $cl5 = \phi^{2\cdot 5} + \phi^{-2\cdot 5} = 123.$
3. $$N_1 = 256 - 123 = 133.$$
4. $a_1 = 2,$
так как $N_1 > cl5$, то есть $133 > 123$.
$$N_2 = 256 - 2 \cdot 123 = 10.$$

$N_2 \neq 0.$

Переходим к пункту 1 при $N_2 = 10$:

1. $$[t_2] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln\phi}\ln\left|\frac{10+\sqrt{10^2-4}}{2}\right|\right)\right] = 2.$$
2. $$cl2 = \phi^{2\cdot 2} + \phi^{-2\cdot 2} = 7.$$
3. $N_2 = 10 - 7 = 3.$
4. $a_2 = 1,$
так как $N_2 < cl2$, то есть $3 < 7$.

$N_2 \neq 0.$

Переходим к пункту 1 при $N_3 = 3$:

1. $$[t_3] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln\phi}\ln\left|\frac{3+\sqrt{3^2-4}}{2}\right|\right)\right] = 1.$$
2. $$cl1 = \phi^{2\cdot 1} + \phi^{-2\cdot 1} = 3.$$
3. $$N_3 = 3 - 3 = 0.$$
4. $a_3 = 1$,
так как $N_3 = cl1$, то есть $1 = 1$.

$N_3 = 0.$

Это значит, что выполнение алгоритма окончено, и натуральное число $N_0 = 256$ может быть представлено в виде разложения по косинусам Люка:

$$256_{10} = 2\cdot cl5 + 1\cdot cl2 + 1\cdot cl1 = 2\cdot 123 + 1\cdot 7 + 1\cdot 3,$$

а также может быть закодировано через косинусы Люка (табл. 5).

Таблица 5

Представление числа $N_0 = 256$ в разложении по косинусам Люка

t	6	5	4	3	2	1	0
clt	521	123	47	18	7	3	2
256	0	2	0	0	1	1	0

Выводы. Выполнив разложения натурального числа N по четырем вариантам: два по функциям Фибоначчи и два по функциям Люка, получаем разнообразие возможностей его представления, а соответствующее кодирование будет таковым: $256_{10} = 1200020_{sf} = 1001200_{cf} = 101212_{sl} = 200110_{cl}$. Учитывая существования взаимосвязей между функциями Фибоначчи и функциями Люка [3], может быть осуществлено их перекодирование. Все это создает предпосылки к созданию системы надежной защиты в информационных сетях.

Резюмируя, можем утверждать, что нами предложена авторская иррационально-троичная система представления натуральных чисел, в которой иррациональной составляющей фактически есть $\phi^2 =$ 2,618033989…, что есть основанием соответствующих функций Фибоначчи и функций Люка, а коэффициенты при этих функциях есть числа $a \in \{0,1,2\}$ в троичной системе.

Кроме этого, доказано, что теорема Zeckendorf и представление натурального числа с иррациональным основанием $\phi = 1{,}618033989\ldots$ — число Фидия, предложенное Д.Бергманом, являются, таким образом, частным случаем, исходя из полученных нами результатов исследований.

Литература. 1. І.С. Ткаченко, М.І. Ткаченко. Алгоритм представлення натуральних чисел як суми фібоначчиєвих та люкових функцій цілочисельного аргументу // Матеріали Всеукраїнської конференції молодих науковців «Інформаційні технології в науці та освіті», Частина I. — Черкаси: 1997. — Стор. 136–138.

2. И.С. Ткаченко, А.П. Стахов. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи // Доклады Академии наук Украины, Вып. 7: 1993. — С. 9–14.

3. И.С. Ткаченко, М.И. Ткаченко. Золотая функция — элемент, образующий систему взаимосвязей функций Фибоначчи и функций Люка // «Академия Тринитаризма». — М. — Эл. №77–6567, публ. 16508. — 01.09.2011.