С.Л. Василенко

Удивительный мир золотоносных числовых рядов

Слово – не воробей,
а последовательность символов алфавита

«Золотое сечение и числа Фибоначчи – близнецы братья. Кто более матери истории ценен? – Мы говорим золотое сечение, подразумеваем числа Фибоначчи. Мы говорим числа Фибоначчи, подразумеваем золотое сечение».

Примерно так может начинаться гимн этим двум уникальным феноменам математики.

Их взаимосвязь несомненна. Она, что называется, заложена в них генетически.

Хотя принципиально, это две совершенно разные математические конструкции, объединенные между собой переходом от рекурсии или разностного (возвратного) уравнения к эквивалентному квадратному уравнению, и обратно:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

С использованием константы золотого сечения (ЗС) Ф можно сформировать степенной ряд 1, Ф, $Ф^2$, $Ф^3$..., в котором каждый последующий элемент равно сумме двух предыдущих, а отношение между двумя соседними числами равно ЗС.

Аналогично число трибоначчи образует степенной ряд 1, Т, $Т^2$, $Т^3$..., где каждое последующее число равно сумме трёх предыдущих, а отношение между двумя соседними числами равно константе Т – положительному корню кубического уравнения $x^3 = x^2 + x + 1$.

Таким образом, прогрессия вида 1, Ф, $Ф^2$, $Ф^3$... – геометрическая с одновременными свойствами арифметического ряда. Такое объединение двух признаков в одной модели часто называют аддитивно-мультипликативным свойством.

Добавляя к этим особенностям рекурсивный способ образования последовательности, можно говорить о «единстве аддитивных, мультипликативных и рекуррентных свойств эволюционных рядов Фибоначчи», как «прямом следствии диалектической триады» [1].

Исследуя золотое сечение, как правило, апеллируют, именно к числам Фибоначчи.

Заметим, что главенствуют здесь всё-таки не сами числа, а процедура их образования: двучленно-аддитивная рекурсия с единичными коэффициентами.

Ибо независимо от исходных (начальных) значений, своим предельным отношением соседних элементов последовательность всегда сходится к константе ЗС – аттрактору фибоначчиевой рекурсии, как максимальному по модулю корню адекватного характеристического уравнения.

Тем значительнее интерес к иным способам формирования числовых рядов, которые, так или иначе, связаны с золотым сечением. Например, в надежде найти новые интерпретации физического содержания этой удивительной фундаментальной константы.

Обобщённая *k*-Витгоф игра. В работе [2] исследованы взаимно дополнительные целочисленные (*a*, *b*)-последовательности Витгофа на основе арифметической прогрессии константы Ф. Одновременно эти ряды допускают рекуррентные алгоритмы своей генерации без привлечения ЗС:

методом последовательной сортировки, когда, начиная с условий $(a_0, b_0) = (0, 0)$, пара (a_n, b_n) определяется так: a_n – наименьшее из натуральных чисел, которое отсутствует среди величин $a_0 \div a_{n-1}$ и $b_0 \div b_{n-1}$, число $b_n = a_n + n$.

В работах [3, 4, 5, с. 89–93] упомянутые ряды называются последовательностями Битти и описаны в качестве победной стратегии при игре в «фибоначчиев ним».

Но особенности этих целочисленных рядов имеют более глубокие корни.

Задача особо примечательна тем, что фактически даёт решение расчленения натурального ряда на две части, количества чисел в которых соотносятся между собой по золотому сечению.

В учёной среде разработчиков "золотосеченской" тематики это достаточно новая уникальная интерпретация феномена золотого сечения.

Эти числа, в частности, лежат в основе выигрышной стратегии "ним" игры – очень древней китайской игры "цзяньшицзы" (выбирание камней) [6], известной в Европе как *игра Витгофа*[1] (1907).

Игровая задача имеет естественное о б о б щ е н и е.

По-прежнему наличествуют две кучки предметов (фишек, спичек) с произвольным количеством в каждой из них.

Два игрока делают ходы поочерёдно.

Игрок может взять поровну фишек из обеих кучек или нескольких фишек, кратных числу k, из любой одной кучки [7]. Обязательно необходимо взять хотя бы один предмет.

Игрок, которому нечего брать, и он остаётся перед пустым столом, считается проигравшим.

Таким образом, первоначальный оригинальный вариант Витгофа соответствует $k = 1$.

Определяются следующие k-пары последовательностей:

$$a_{i,\,n} = \lfloor (n + i/k)(1 + 1/K) \rfloor,$$

$$b_{i,\,n} = \lfloor (n + i/k)(1 + K) \rfloor,$$

где $K = \dfrac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$, $i = \overline{0,\, k-1}$; $n = 0, 1, 2, 3\ldots$; $\lfloor \xi \rfloor$ – целая часть от ξ.

В е л и ч и н а K – и р р а ц и о н а л ь н а я.

Действительно, предположим обратное. То есть пусть подкоренное выражение является квадратом: $k^2 + 4 = q^2$.

Если k – нечётное, то $k^2 = 1 \pmod 8$ и $q^2 = 5 \pmod 8$, что невозможно.

Если $k = 2k_1$ – чётное, то $a = 2a_1$ – чётное и $k_1^2 + 1 = a_1^2$, что также невозможно.

Следовательно, $k^2 + 4$ не может быть совершенным квадратом, и K – иррационально.

Поскольку $1 + K = 1 + K^{-1} + k$, то можно показать, что $b_{i,n} = a_{i,n} + nk + i$.

В частности, начальное значение $b_{i,0} = i$.

Последовательности $\{a_{0,\,n}\}$ и $\{b_{0,\,n}\}$ являются комплементарными. – Каждое из первых N натуральных чисел входит один и только один раз либо в одну, либо в другую последовательность.

При целочисленном значении $k = \sqrt{5F_{2m+1}^2 - 4}$, величина K становится представимой через квадратный корень пяти и "золотого сечение"

$$A = F_{2m} + F_{2m+1}\Phi,$$

где F_s – числа Фибоначчи, $\Phi = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$.

[1] Willem Abraham Wythoff – бельгийский математик (1865–1939); "A modification of the game of nim" (1905).

Различные варианты начального формирования последовательностей $\{a_{k,n}\}$ и $\{b_{k,n}\}$ отражены в табл. 1.

Таблица 1

k-последовательности Витгофа

n	$k = 2$				$k = 3$						$k = 4$							
	a_0	b_0	a_1	b_1	a_0	b_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_0	b_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	2	0	0	0	1	0	2	0	3
1	1	3	2	5	1	4	1	5	2	7	1	5	1	6	1	7	2	9
2	2	6	3	8	2	8	3	10	3	11	2	10	2	11	3	13	3	14
3	4	10	4	11	3	12	4	14	4	15	3	15	4	17	4	18	4	19
4	5	13	6	15	5	17	5	18	6	20	4	20	5	22	5	23	5	24
5	7	17	7	18	6	21	6	22	7	24	6	26	6	27	6	28	7	30
6	8	20	9	22	7	25	8	27	8	28	7	31	7	32	8	34	8	35
7	9	23	10	25	9	30	9	31	9	32	8	36	8	37	9	39	9	40
8	11	27	12	29	10	34	10	35	11	37	9	41	10	43	10	44	10	45
9	12	30	13	32	11	38	12	40	12	41	11	47	11	48	11	49	12	51
10	14	34	14	35	13	43	13	44	13	45	12	52	12	53	12	54	13	56
11	15	37	16	39	14	47	14	48	15	50	13	57	13	58	14	60	14	61
12	16	40	17	42	15	51	16	53	16	54	14	62	15	64	15	65	15	66

Некоторые частные случаи k-последовательностей Витгофа имеют следующую аналитическую форму:

$$k = 4:\ b_{0,n} = \lfloor n(1+\Phi^3)\rfloor = \lfloor n(3+\sqrt{5})\rfloor \quad \Rightarrow \quad 0, 5, 10, 15, 20\ldots$$

$$k = 4:\ b_{1,n} = \lfloor (n+1/4)\,(1+\Phi^3)\rfloor = \lfloor (n+1/4)\,(3+\sqrt{5})\rfloor \quad \Rightarrow \quad 1, 6, 11, 17, 22\ldots$$

$$k = 4:\ b_{2,n} = \lfloor (n+2/4)\,(1+\Phi^3)\rfloor = \lfloor (n+1/2)\,(3+\sqrt{5})\rfloor \quad \Rightarrow \quad 2, 7, 13, 18, 23\ldots$$

$$k = 4:\ b_{3,n} = \lfloor (n+3/4)\,(1+\Phi^3)\rfloor = \lfloor (n+3/4)\,(3+\sqrt{5})\rfloor \quad \Rightarrow \quad 3, 9, 14, 19, 24\ldots$$

$$k = 4:\ a_{3,n} = \lfloor (n+3/4)2\phi\rfloor = \lfloor (n+3/4)\,(\sqrt{5}-1)\rfloor \quad \Rightarrow \quad 0, 2, 3, 4, 5, 7\ldots$$

$$k = 3:\ b_{2,n} = \lfloor (n+2/3)\,(5+\sqrt{13})/2\rfloor \quad \Rightarrow \quad 2, 7, 11, 15, 20\ldots$$

Так или иначе, но корень из пяти – это признак наличия свойств золотого сечения.

Матрица Витгофа. В контексте рассматриваемых свойств золотого сечения представляет интерес матрица Витгофа[2] с элементами, определяемыми по формуле:

$$W_{k,\,n} = \lfloor k\Phi\rfloor F_{n+1} + (k-1)F_n,$$

где k, n – соответственно номера строк и столбцов матрицы.

Матрица обладает многими интересными свойствами [8, с. 18–20]:

– элементы в любом ряду или колонке монотонно возрастают;

– первый ряд (строка $k = 1$) содержит числа Фибоначчи;

– все ряды удовлетворяют рекурсии Фибоначчи и отличаются друг от друга лишь начальными условиями;

[2] http://mathworld.wolfram.com/WythoffArray.html, http://oeis.org/classic.html#WYTH.

– матрица содержит все натуральные числа, каждое из которых появляется (фигурирует) лишь однажды, и др.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322
2	4	6	10	16	26	42	68	110	178	288	466
3	6	9	15	24	39	63	102	165	267	432	699
4	8	12	20	32	52	84	136	220	356	576	932
5	9	14	23	37	60	97	157	254	411	665	1076
6	11	17	28	45	73	118	191	309	500	809	1309
7	12	19	31	50	81	131	212	343	555	898	1453
8	14	22	36	58	94	152	246	398	644	1042	1686
9	16	25	41	66	107	173	280	453	733	1186	1919
		AA	*BA*	*ABA*	*BBA*						

Относительно столбцов можно рассмотреть комбинирование вложений двух функций:

$$A \equiv a(n) = \lfloor n\Phi \rfloor, \qquad B \equiv b(n) = \lfloor n\Phi^2 \rfloor.$$

Их иногда называют соответственно нижней и верхней последовательностями Витгофа. Например, запись $ABB = 2A + 3B$ означает, что $a(b(b(n))) = 2a(n) + 3b(n)$.

В частности, справедливы такие соотношения:

$AAA = AB - 2 = A + B - 2$ .... A134859[3]

$AAB = AA + AB = A + 2B - 1$ A134860

$ABA = 3A + 2(n - 1)$ A035337

$ABB = 2A + 3B$ A134862

$BAA = A + 2B - 3$ A134861

$BAB = 2A + 3B - 1$ A134863

$BBA = 5A + 3(n - 1)$ A035338

$BBB = 3A + 5B$ A134864

Ряд Голомба. В математике ряд Голомба[4] (1966) – монотонная неубывающая целочисленная последовательность, в которой $g(n)$ означает количество раз присутствия числа n в последовательности, начиная с $g(1) = 1$, со свойством: для $n > 1$ каждый элемент $g(n)$ – есть наименьшее целое, которое способно удовлетворить исходное условие.

Ряд Голомба начинается такими числами[5]:

1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 13...

То есть n-й терм $g(n)$ – количество появлений n в последовательности так, что:

$$g(n) = \{k : g(k) = n\}.$$

[3] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://oeis.org/.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Golomb_sequence.

[5] Последовательность A001462. – The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) – http://oeis.org/A001462.

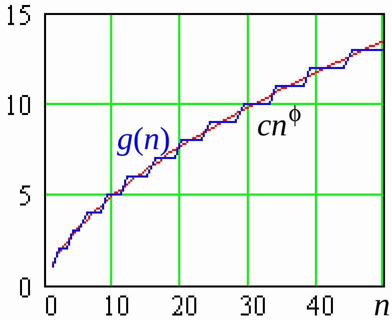
Иначе говоря, если $(g_1, g_2) = (1,\ 2)$, то для индекса k, удовлетворяющего неравенству $g_1 + g_2 + \ldots + g_{n-1} < k < g_1 + g_2 + \ldots + g_n$, мы имеем $g_k = n$.

Рекуррентная формула для данной числовой последовательности имеет вид многократно-вложенной (самоссылающейся) функции (*C. Mallows*)

$$g(n) = 1 + g(n - g(g(n-1)))$$

или многократно-вложенного индекса (номера элемента) числового ряда

$$g_n = 1 + g_{n-g_{g_{n-1}}}.$$



На первый взгляд, особо не выдающаяся или особенная последовательность. Можно даже сказать, какая-то уж слишком повторяющаяся.

Однако есть одно весьма важное исключение.

Просто поразительно, но асимптотой для $g(n)$ является функция золотого сечения (рисунок) [9–11]:

$$g(n) \cong \Phi^{2-\Phi} n^{\Phi-1} = cn^{\phi},$$

где $c = \Phi^{2-\Phi} \approx 1{,}202$; $\phi = \Phi^{-1} = \Phi - 1 \approx 1{,}618 - 1 = 0{,}618$; $\cong$ – знак целочисленного округления (функция *round*) до ближайшего целого.

В логарифмических координатах асимптотическая функция строго линейна и по основанию Φ равна $\phi^2 + \phi \cdot \lg_{\Phi} n$.

Ряд Голомба без потери информации допустимо ужать, применив такую запись:

$$1_1,\ 2_2,\ 3_2,\ 4_3,\ 5_3,\ 6_4,\ 7_4,\ 8_4,\ 9_5,\ 10_5,\ 11_5,\ 12_6 \ldots,$$

где нижний индекс означает количество подряд идущих одинаковых чисел.

В свою очередь, этот сжатый ряд можно представить в ином характеристическом виде, через количество повторов нижних индексов, отбросив основания:

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 6\ldots,$$

где k-е по порядку число m означает, число k в последовательности повторяется m раз.

Что же мы в результате видим? – Ряд Голомба нисколько не изменился.

Вновь образованная последовательность такая же, как и оригинал!

Иначе говоря, в данном примере первые 45 чисел от 1 до 12 мы заменили 11 (одиннадцатью) числами их повторяемости, то есть, сократив их количество на 3/4, совершенно не уменьшив при этом количество информации.

Но что удивительно, сжав форму записи практически на 75 %, мы снова вернулись ... к первоначальному ряду!

Подобное многократное сжатие информации снова и снова приводит нас к исходному ряду. – Одним, словом "Феникс".

Таким образом, сколько бы мы не сжимали информацию, это абсолютно не влияет на саму информацию. – Просто поразительно!

Своеобразная самоподобная последовательность, числовой фрактал или фрактальный ряд[6].

Это совершенно новое качество ("звучание") константы золотого сечения.

Ничего подобного, на наш взгляд, за этим числом ранее не наблюдалось.

[6] Fractal sequences. – http://faculty.evansville.edu/ck6/integer/fractals.html.

Как впрочем, и сама асимптотика $\Phi^{2-\Phi} n^{\Phi-1}$.

Заметим, что ряд Голомба – не отвлечённая абстрактная последовательность.

В частности, он используется для построения линейных цифровых фильтров с *конечной импульсной характеристикой* или FIR-фильтров (FIR – *finite impulse response*[7]) [12].

Характерной особенностью данных устройств является ограниченность по времени импульсной характеристики так, что с некоторого момента времени она становится в точности равной нулю.

Такой фильтр также называют не рекурсивным, из-за отсутствия обратной связи.

Знаменатель передаточной функции этого фильтра – некая константа.

Последовательности Хофштадтера[8]. С привычным понятием *итерации* тесно связано другое понятие – *рекурсия*. Она обусловлена методом определения функций, когда вычисляемая функция применена в теле своей же собственной дефиниции.

То есть сценарий развития процесса рекурсивно вызывает себя самого.

По принципу рекурсии строятся многие фракталы (треугольник Серпинского и др.).

Рекурсия является одной из главных тем книги Д. Хофштадтера, а также ядром его последовательностей [13, с. 133–135].

Так, G-последовательность (A005206) с начальным условием $G(0)=0$ определяется согласно простой и красивой рекурсии:

$$G(n) = n - G(G(n-1)).$$

Кажущееся затруднение с вычислением функции через самоё себя легко устраняется, если соотношение представить через многократное вложение подстрочных индексов в числовых рядах:

$$G_n = n - G_{G_{n-1}}.$$

Элементы числового ряда можно вычислять и аналитически

$$G_{n-1} = \lfloor n\phi \rfloor = \lfloor n\Phi \rfloor - n.$$

Начальные элементы ряда

0 1 1 2 3 3 4 4 5 6 6 7 8 8 9 9 10 11 11 12 12 13 14 14 15 16 16 17 17 18 19 19 20 21 21 22 22 23 24 24 25 25 26 27 27 28 29 29 30 30 31 32 32 33 33 34 35 35 36 37 37 38 38 39 40 40

А теперь несколько слов о замечательном свойстве данной модели.

Присутствует весь натуральный ряд. Нет более двух одинаковых чисел.

Если мы найдём первые разности (приращения) $\Delta_n = G_n - G_{n-1}$, и подсчитаем количество единиц, то обнаружим, что их количество составляет $\phi \cdot 100$ %.

Таким образом, отношение суммы приращений к длине всё возрастающей выборки стремится в точности к константе золотого сечения:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \Delta_n = \phi = \Phi^{-1}.$$

Возможно простое рекурсивное расширение задачи p-вложений (A005374...):

$$g(n) = n - \underbrace{g(g(g...g}_{p}(n-1)...)), \quad G(0)=0.$$

---

7 http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_impulse_response.

8 http://en.wikipedia.org/wiki/Hofstadter_sequence.

Аналитическая форма имеет уже не совсем явный вид, с точностью до единицы:

$$G_{n-1} = \lfloor n\lambda \rfloor + \{\ 0,\ 1\ \},$$

где λ – положительный корень алгебраического уравнения $x^p + x = 1$.

При $p = 2$ приходим к G-последовательности с её золотоносным содержанием.

Существуют и другие разновидности последовательностей Хофштадтера[9], с их дальнейшим развитием в плане многообразия форм.

Так в работе [14] рассматривается обобщённое семейство мета-Фибоначчи последовательностей вида $a(n) = \sum_{i=1}^{k} a(n - i - (s-1) - a(n-i))$, где s – любое целое (положительное или отрицательное).

Частный случай (s = 1, k = 2, A006949) выражает хорошо известную последовательность Хофштадтера, $a(0) = a(1) = a(2) = 1$:

$$a(n) = a(n-1-a(n-1)) + a(n-2-a(n-2)).$$

Число различных частных сумм вида: 1 + [1, 2] + [1, 4] + [1, 8] + [1, 16] + …

Например, a(6) = 3, поскольку 6 =1+1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+2 = 1+1+4.

К вопросу обобщения. 1) Золотоносное разбиение натурального ряда на две возрастающие непересекающиеся последовательности $a_n = \lfloor n\Phi \rfloor$ и $b_n = \lfloor n\Phi^2 \rfloor = a_n + n$ методологически не одиноко.

Например, последовательности, заданные формулами $a_n = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ и $b_n = a_n + 2n$ также заполняют весь натуральный ряд без пропусков и перекрытий [15]. А их количественное соотношение между собой составляет $1 + a_n/n \ \to\ 1 + \sqrt{2}$.

2) Задача рекурсивных p-вложений по расширению (обобщению) G-последовательности Хофштадтера $g(n) = n - g(g(g...g(n-1)...))$ соотносится с действительным корнем тринома $x^p + x - 1$ степени p.

Выводы.

1. Традиционно константа золотого сечения связывается с числами Фибоначчи как предельный аттрактор рекуррентной последовательности в виде отношения соседних членов ряда. В равной мере к такому результату приводит двучленно-аддитивная рекурсия с единичными коэффициентами независимо от пары исходных (начальных) значений.

2. Обобщённая k-Витгоф игра или "ним" игра предусматривает ряд частных решений, основанных на золотом сечении.

3. Числовой рекурсивный ряд Голомба $g(n) = 1 + g(n - g(g(n-1)))$ обладает поразительными свойствами. Его асимптотой является функция $\Phi^{2-\Phi} n^{\Phi-1}$, основанная на золотом сечении. Кроме того, показано уникальное свойство ряда, вытекающее из свойств золотого сечения: многократное последовательное сжатие информации каждый раз приводит к исходному ряду, сохраняя его самоподобные или фрактальные свойства.

[9] http://mathworld.wolfram.com/HofstadterG-Sequence.html.

4. В G-последовательности Хофштадтера $G(n) = n - G(G(n-1))$ с нулевым начальным условием $G(0) = 0$ отношение суммы приращений элементов к длине возрастающей выборки стремится к константе золотого сечения $\phi = \Phi^{-1} \approx 0{,}618$.

Литература:

1. *Чернов А*. Принцип диалектического императива. – 2008. – http://chernov-trezin.narod.ru/ZS_1_1.htm.

2. *Василенко С.Л.* Золотые россыпи в целочисленных прогрессиях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16520, 18.05.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161833.htm.

3. *Connell Ian G*. Some properties of Beatty sequences. – http://cms.math.ca/cmb/v2/cmb1959v02.0190-0197.pdf.

4. *Kimberling C*. Complementary Equations // Journal of Integer Sequences. – 2007. – Vol. 10. – Article 07.1.4. – http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL10/Kimberling/kimberling26.pdf.

5. *Шредер М*. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 528 с. – http://reslib.com/book/Fraktali__haos__stepennie_zakoni.

6. *Матулис А.Ю*., *Савукинас А.Ю*. Ферзя – в угол, "цзяньшицзы" и числа Фибоначчи // Квант. – 1984. – № 7. – С. 18–21, 29. – http://kvant.mirror1.mccme.ru/1984/07/ferzya_-_v_ugol_czyanshiczy_i.htm.

7. *Connell I.G*. A generalization of Wythoff's game // Canadian Mathematical Bulletin. – **2**(1959), 181–190. – http://cms.math.ca/cmb/v2/cmb1959v02.0181-0190.pdf.

8. *Sloane N.J.A*. My Favorite Integer Sequences. – http://www2.research.att.com/~njas/doc/sg.pdf.

9. *Golomb S.W*. Problem 5407 // Amer. Math. Monthly, 73 (1966), 674; 74 (1967), 740–743.

10. *Petermann Y.F.S*. On Golomb's Self Describing Sequence // Journal of Number Theory. – Vol. 53, Issue 1, July 1995. – P. 13–24.

11. *Cloitre B*., *Sloane N.J.A*., *Vandermast M.J*. Numerical Analogues of Aronson’s Sequence. – 2003. – http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0305/0305308v1.pdf.

12. *Rajan A*., *Jamadagni H*., *Rao A*. Integer sequences window reconfigurable FIR filters // 16-th International Conference on High Performance Computing, India, Dec. 16–19, 2009. – http://ewh.ieee.org/conf/hprcw/arajan_rcw08.pdf.

13. *Хофштадтер Д*. Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда. – Самара: ИД "Бахрах-М", 2001. – 720 с. – http://www.paco.net/~indexless/wwg/index.htm.

14. *Ruskey F*, *Deugau C*. The Combinatorics of Certain *k*-ary Meta-Fibonacci Sequences // Journal of Integer Sequences. – 2009. – Vol. 12. – http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL12/Ruskey/ruskey6.pdf.

15. *Баабабов А*. "Пентиум" хорошо, а ум лучше // Квант. – 1999. – № 4. – С. 36–38. – http://kvant.mirror1.mccme.ru/pdf/1999/04/kv0499baababov.pdf.