В.Л. Владимиров

РАЗМЫШЛЕНИЯ О СТАТЬЕ А.П. СТАХОВА «КОНСТРУКТИВНАЯ (АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ) ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЯ, СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ ОСНОВАНИЯМИ И МАТЕМАТИКА ГАРМОНИИ»

«Возможна ли некая методология отношений
и поведения независимых исследователей Непознанного,
которая … была бы неразрушительной и эффективной»?
Ответ мне видится только в консолидации таких учёных
на основе некоторого «Кодекса Этики сотрудничества».
(А.А. Корнеев, Интерференция интеллектуального сотворчества //
«Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15724, 02.01.2010)

«Математика имеет свои «последние квартеты Бетховена»,
предназначенные только избранным, но в ней имеются и
«песенки Шуберта», доступные непосредственно всем»
(Г. Хассе, немецкий математик)

– Почему многие назначают дату
свадьбы на "магические" числа типа
11.11.11, 20.11.2011, 12.12.12 или 20.12.2012?
– Чтобы мужу было проще запомнить эту дату
(из Интернета)

Содержание:

1. Почему статья получила такое название

Итак, статья А.П. Стахова [1]. Профессор А.П. Стахов поднимает эти темы не впервые. Но в том-то и секрет Мастера, что на каждом новом витке спирали развития этих тем мы видим новую трактовку, свежую изюминку, необычный ракурс освещения, казалось бы, известных положений. И то, что было раньше «вроде бы понятным», становится «предельно ясным». А иногда рождает свежие мысли и вызывает потребность продолжить исследование в новом направлении.

Рецензировать статьи прекрасного популяризатора науки и известнейшего ученого – неблагодарное занятие. Лучше него всё равно не скажешь. Можно было бы попытаться рассказать то же самое короче и в шутливой манере, чтобы было всё понятно и непосвященным в суть предмета, или, как принято говорить, «чайникам». Написать что-то типа «Математика гармонии – это просто». У меня было такое искушение. Тем более, что впервые я написал о работах А.П. Стахова четверть века назад, в научно-популярной книге «Беседы о метрологии».

И данную работу я сначала хотел назвать не «Размышления о …», а «Отзыв о …». Но в отзыве пришлось бы отразить все важные моменты статьи Стахова из восьми частей. И я понял, что войду в противоречие с «пространственно-временным континуумом бытия». Не уложусь в пространство одной статьи и не успею завершить отзыв до конца online семинара по МГ. Так что буду далее в данной работе «цепляться» за отдельные моменты, отдельные мысли, с которыми резонирует мое восприятие математики гармонии.

А параллельно, восхищаясь работами Алексея Петровича, попробую всё же критически переосмыслить статью [1]. Но – обещаю, что критика, если она будет, не выйдет за рамки доброжелательной, конструктивной…

Итак, **во-первых**, почему же из всего многообразия проблем, решенных Алексеем Петровичем за четыре десятилетия, он выбрал только эти три: **алгоритмическая теория измерения, системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии**? Косвенный ответ на этот вопрос, очевидно, можно найти в книге С. К. Абачиева «Концепции современного образования», которая соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (третьего поколения) и рекомендована студентам по направлению подготовки бакалавров «Гуманитарные науки» [2].

Книга С. К. Абачиева состоит из 12 глав: *научная картина мира, механицизм, термодинамика и эволюция мироздания, кибернетика, синергетика, эволюционизм, биология, феномен человека, техносфера, постнеклассическая наука, авангард науки 20-го столетия*.

Заключительный параграф каждой главы посвящен представлению того или иного направления в лицах. В параграфе 5.9 «Кибернетика в лицах» наряду с биографическими данными Чарльза Беббиджа, Ады Лавлейс, Клода Шеннона, Джона фон Неймана, Алана Тьюринга, Ноберта Винера, Уильяма Эшби включены данные и основателей научного направления "Системы счисления с иррациональными основаниями - коды золотой пропорции" – Джорджа Бергмана и Алексея Стахова.

Вот как С. К. Абачиев охарактеризовал в своей книге деятельность А.П. Стахова:

«*Алексей Петрович Стахов (р. 1939). Советский инженер-связист и математик. В настоящее время проживает в Канаде. В начале 70-х гг. стал первым профессиональным разработчиком системы счисления Бергмана. Выявил её существенные преимущества в помехоустойчивом кодировании информации перед двоичным кодом Дж. фон Неймана. Обобщил числа Фибоначчи и отношения золотой пропорции на основе диагональных сумм, генерируемых арифметическим треугольником Паскаля. Разработал принципиально новую арифметическую первооснову цифровых информационных технологий, которая базисно вносит в них автоматическую самодиагностику и самокоррекции без многоуровневой системы корректирующих кодов. Советское государство, проученное опытом былых гонений на кибернетику, организовало беспрепятственное и беспрецедентное патентование его разработок в СССР и за рубежом. До катастрофической «перестройки» и «реформ» 90-х гг. в нашей стране А. П. Стахов успел воплотить свою концепцию в реальную аппаратуру уникально высокой надёжности. В настоящее время переход на эту арифметическую первооснову становится актуальным в возрастающем ряде цифровых информационных технологий*» [2].

Почему же С. К. Абачиев включил биографию А.П. Стахова в число ста научных биографий выдающихся ученых и мыслителей всех времен и народов, начиная с Аристотеля?

Видимо, потому, что С. К. Абачиев использовал жесткий критерий наличия пионерных научных результатов.

В науке и технике, как и в спорте, всегда есть место первым, «пионерам». Пионерными являются "Таблица Менделеева", "Кибернетика" Винера, "Математическая теория связи" Шеннона, "Фракталы" Мандельброта и др.

"Пионерными" являются и три книги А.П. Стахова, посвященные соответственно алгоритмической теории измерения, системам счисления с иррациональными основаниями и математике гармонии:

- Введение в алгоритмическую теорию измерения" (1977)
- Коды золотой пропорции (1984)
- "The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science" (2009).

Вот почему С. К. Абачиев включил А.П. Стахова в свой перечень выдающихся ученых всех времен и народов. И вот почему А.П. Стахов посвятил именно этим своим трем пионерным научным теориям рецензируемую статью.

Большое видится на расстоянии. Есть надежда, что будущие поколения *философов* гораздо лучше меня растолкуют достоинства теорий Стахова. Но я хочу подчеркнуть главное: честь и хвала Сергею Константиновичу Абачиеву за то, что он не передоверил эту работу потомкам и уже сейчас высоко оценил вклад своего современника в науку.

Я искренне восхищаюсь, прежде всего, АТИ – алгоритмической теорией измерения и считаю, что именно эта теория соединила широким мостом геометризованную математику Запада с алгебраизованной математикой Востока.

Осуществлен переход от геометрических измерений длины отрезка прямой и от физических измерений массы тел на простейших рычажных весах к оптимальным алгоритмам измерений, к простейшей алгебраической записи этих алгоритмов в виде рекурсий, к записи результатов измерений в разных позиционных системах счислений.

Если коротко – это соединение в единой теории искусственно разобщенных разделов математики: **геометрии** и **алгебры**. Такое соединение, по моему мнению, удивляет так же, как доказательство одновременного наличия корпускулярных свойств и волновых свойств у света.

Системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии не менее романтичны и не менее загадочны в своей философской глубине, чем АТИ. О них мы также будем говорить далее в отдельных пунктах. А пока, ответ на «во-первых» вроде бы найден.

Во-вторых, возникает еще один вопрос: не считает ли А.П. Стахов, что Математика гармонии состоит **только** из алгоритмической теории измерения и систем счисления с иррациональными основаниями?

Нет, не считает. Об этом автор говорит как в последней части 8 рецензируемой статьи, так и в статье Концепция гармоничного образования и школы будущего (реплика на публикацию Т.Г. Константиновой «Математика и гармония окружающего мира») [3]. Но к данному вопросу мы еще вернемся. А сейчас рассмотрим роль измерения в развитии науки, как ее представляет А.П. Стахов – автор рецензируемой статьи (далее для краткости – **автор**).

2. Алгоритмическая теория измерения (АТИ)

Автор вначале рассказывает, как зарождалась конструктивная (алгоритмическая) теория измерения.

Практические потребности **в измерении** вызвали развитие начал геометрии, вызвали также первоначальный экстаз от успехов, а затем, как и положено, кризис: были открыты «несоизмеримые отрезки».

Практические потребности **в счете** шли рука об руку с практическими потребностями в измерении и привели к арифметике натуральных чисел с позиционным представлением числа.

…Что занимало умы наших предков после того, как они удовлетворяли чувство голода? Поначалу это были измерение и счет.

Реликварий стопы св. Иакова Кампостельского.
Сер. XIII в. Работа Гуго де Оньеса (Oignes).
Серебро, медь, эмаль на дереве.
Бельгия, Намюр, монастырь сестер Нотр-Дам.

Наверное, первый древний человек, который с помощью своей *стопы* с завистью обнаружил, что у соседа огород в два раза больше, чем у него, заложил основы и счета, и геометрии.

И лишь затем, когда наши предки научились считать и измерять, после сытной трапезы их стала занимать гармония окружающего мира.

Но вначале было **измерение**.

Первой "теорией измерений" был свод правил древнеегипетских землемеров. От него берет начало **геометрия**. Фундаментальные проблемы геометрии стали основным предметом изучения античной математики. Шли века, и решение этих проблем породило геометрию Евклида и учение о числах.

Но не только. Родилась наука об измерениях – метрология. Что приходилось измерять? Различные физические величины. Следует заметить, что понятие физической величины развивается до сих пор. Во все века люди учились измерять ранее неизмеряемое. Иногда реальность даже превосходила мечты. Например, кто мечтал измерять параметры призраков?

Вот выдержка из книги «Беседы о метрологии» [4, с. 110]:

«*Интересно, что идея голографии впервые возникла у лауреата Нобелевской премии физика Дениса Габора, когда он пытался решить метрологическую проблему: повысить усиление электронного микроскопа до теоретически возможного предела.*

Теоретические идеи Габора были реализованы после создания лазера. В настоящее время голографометрия (голографические измерения) развивается быстрыми темпами. Созданы голографические микроскопы, голографические измерительные установки. Эти средства измерений дают полную и достоверную количественную информацию не только о трехмерных объектах, а и о быстропротекающих процессах, недоступных исследованиям другими методами.

Измерения выполняются в два этапа. Сначала регистрируется голограмма измеряемого объекта, потом производится измерение не самого объекта, а его объемного изображения – «призрака», заменяющего объект.

…В некотором объеме движутся бактерии. Голографический микроскоп, имеющий значительно большее поле зрения, чем у обычного микроскопа, позволяет после съемки голограммы просматривать один за другим «срезы» застывшего изображения исследуемого объема. Отдельные детали биологических объектов восстанавливаются на разных участках глубины сцены из их жизни. Можно увидеть детали строения клетки (например, начавшийся процесс ее деления), не обнаруживаемые в обычный микроскоп. Можно оценить различную плотность вещества в разных частях клетки или в разных клетках.

Голограмма дает не только прекрасное объемное изображение ограненных кристаллов, например, бриллиантов. Она позволяет также вскрывать их внутренние дефекты. Можно контролировать степень однородности искусственных кристаллов, что позволяет выделять наиболее пригодные для практического применения части кристаллов. Другими оптическими методами сделать это либо очень трудно, либо вообще невозможно.

Голографические измерительные установки выполняют разные работы. Они контролируют рельеф поверхности магнитных дисков, используемых в системах памяти ЭВМ, качество световодов в процессе их изготовления и эксплуатации».

Кстати, японские ученые уже разработали голограммы, которые реагируют на физические прикосновения (Touchable Holograms).

А что будет дальше? Один пример. Представьте, что ваш правнук хочет заказать костюм у портного. Ему не придется тратить время на примерки. Он пошлет стилисту по электронной почте свою последнюю голограмму в стиле ню, тот произведет все необходимые измерения на призраке и вернет голограмму, «одетую» в планируемый костюм. После одобрения плана стилист пришлет материализованный костюм и получит честно заработанные электронные деньги.

Фундаментальный подход к проблеме измерения явился источником развития физики, математики, а также «нефизических» точных наук. Например, появилась даже новая специальность «голографист», о которой как-то поведал А.А. Корнеев, один из авторов сайта АТ.

В современной физике фундаментальный подход к проблеме измерения привел к соотношению неопределенностей Гейзенберга, ограничивающему точность квантово-механических измерений, затем и к квантовой физике.

А доказательство пифагорейцами существования несоизмеримых геометрических отрезков привело к развитию теории иррациональностей и иррациональных чисел, математической теорий измерения, а затем и всей «непрерывной математики».

Но любое серьезное исследование предполагает как фундаментальный, так и **прикладной подход**. Прикладной подход к измерениям привел к решению важнейшей задачи обеспечения единства измерений и к Международной системе единиц СИ. Эта задача решена не до конца и сейчас. Например, если «новый русский» захочет продать в Нью-Йорке килограмм золота, купленный в Москве, то его не сразу поймут, ибо в Нью-Йорке все знают, что такое золото, но почти никто не знает, что такое «килограмм».

Казалось бы, измерение физической величины всегда заключается в одном и том же: в сравнении одной величины с другой величиной того же рода, которую принято называть единицей измерения. Но автор подчеркивает **разницу** между понятием «измерение» у математиков и физиков.

Фундаментальный и прикладной подходы породили даже новые понятия –математической и физической теории измерений. **Математическая теория измерений** считает возможным "абсолютно точно" сравнивать размеры двух величин. **Физическая теория измерений** стоит на позиции невозможности "абсолютно точного" сравнения размеров двух величин.

Математики запросто указывают точное значение конкретной величины с определенным числом знаков. А физики говорят, что могут дать лишь приблизительный результат измерений и не могут обеспечить точность свыше 12-ти, например, знаков. Практическая точность электрических измерений ограничена, к примеру, белым шумом в тракте передачи электрического сигнала, эквивалентного значению измеряемой величины.

Математика имеет дело с не имеющими размеров точками, с не имеющими толщины кривыми и с непрерывным пространством-временем. А физики говорят, что эти понятия – сплошная бессмыслица.

Но главное-то вот что: в реальной жизни избежать погрешностей невозможно.

Невольно приходишь к мысли: а вдруг математики неправы, вдруг они ошибочно «оторвались» от физиков и зря считают, что можно измерять без погрешности, абсолютно точно?

Не соответствует ли такое измерение постижению «абсолютной истины»?

И не пора ли спустить математиков с небес на грешную Землю?

Автор анализирует «стратегические ошибки», допущенные в математике в процессе ее развития. В 19-м веке такая ошибка состояла в том, что «Теория бесконечных множеств Кантора» без достаточного критического анализа была возведена на пьедестал «величайших

математических открытий». Обнаружение парадоксов в Канторовской теории множеств и возникший при этом кризис в основаниях математики остудили энтузиазм математиков. А.П. Стахов считает, что «Канторовская теория бесконечных множеств» является «величайшей математической мистификацией 19-го века». Следствием такой ошибки и является современный кризис в основаниях математики, влияющий и на другие точные науки.

Вот один из примеров. Расстояние - это не атомарная материя, отрицать ее делимость - это значит подрывать основы стандартного дифференцирования, к которому мы все привыкли. Длину, которая не может делиться пополам, наше мышление даже не может себе представить. Но исследователи отмечают [5], что дифференциальное и интегральное исчисление, основанное на бесконечном делении единицы, в неклассической физике, то есть в квантовой и релятивистской теории, уже не годится. Нужна новая конструктивная наука, в которой будут работать и ноль, и бесконечность.

Первым из «современных» математиков-конструктивистов можно считать Гаусса, который сказал: "*Я возражаю … против употребления бесконечной величины как чего-либо завершенного, что никогда не позволительно в математике: можно лишь говорить о пределах, к которым некоторые величины приближаются как угодно близко, или о неограниченно возрастающих величинах*".

Гаусс возражал против «завершенной бесконечности», а вслед за ним стали возражать и все математики–конструктивисты.

Чтобы измерять без погрешности, абсолютно точно, нужно хотя бы философски представить бесконечное число измерений, позволяющее вообще освободиться от случайной погрешности. Чтобы измерять без погрешности, нужно признать понятия «актуальной бесконечности», «завершенной бесконечности» измерений. А в рамках конструктивного подхода к математической теории измерения эти нереальные понятия должны быть исключены в силу внутренней противоречивости.

…Двое украинских ученых, Алексей Стахов и Игорь Витенько, в 1970 г. начали создавать математическую теорию измерения на основе идеи о **конечности** измерительного процесса. Ведь всякое измерение практически завершается за конечное число шагов. Количество измерительных шагов может быть как угодно большим, но всегда существует возможность увеличить его на единицу. Такую новую математическую теорию измерений авторы назвали **алгоритмической теорией измерения.** Плохо или хорошо назвали – не в этом суть. Как назвать – это всегда прерогатива авторов. Кстати, с 1977 года прошло без малого 35 лет, название теории АТИ прижилось. Даже оппозиция в среде золотоискателей против этого названия не возражает. Интересно, почему? Чем это название лучше «Математики гармонии»?

Применение алгоритмической теории измерения (волею судеб дальнейшее развитие этой теории А.П. Стахову пришлось осуществлять самому) было революцией в математической теории измерения. При теоретико-множественном подходе измерение ведется "до точки", т.е. до абсолютно точного совпадения измеряемого и измеряющего отрезков (возможность такого абсолютно точного измерения вытекает из аксиомы Кантора). При **конструктивном** подходе измерение никогда не доходит "до точки", а результатом измерения всегда является некоторый интервал неопределенности (погрешности) относительно истинного значения измеряемой величины. С увеличением числа шагов измерения интервал погрешности сужается, но никогда он не превращается в точку.

В работе "О философии математики" Герман Вейль так выразил разницу между принятым, классическим и новым, конструктивным представлениями о непрерывном множестве – континууме: "*Современному анализу континуум представляется в виде множества его* *точек /…/ Между тем обладание частями есть основное свойство континуума /…/. В этом заключается собственно основание … попытки исходить не из точки, а из интервалов, как из первичных элементов построения*".

Точка– это ничто, а интервал – это часть целого. Поэтому, по мнению Вейля, **континуум состоит не из точек, а из интервалов**. Вот и остаток при измерении, по мнению Стахова, – это не ноль, а интервал, в который «вложена» погрешность измерения. Вооружившись этим понятием, Стахов пошел вперед, к Евклиду, к новой науке, выражающей древнегреческую «гармонию Мироздания».

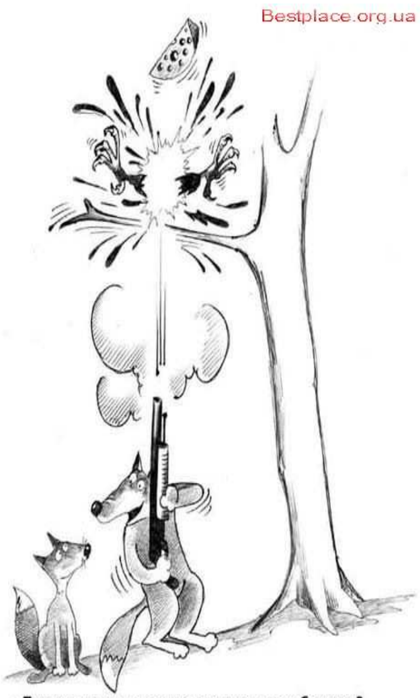
Для синтеза оптимальных n-шаговых алгоритмов измерения автор строит **математическую модель измерения**. На отрезке AB ищется «неизвестная» точка X. Длина отрезка AX определяется с помощью k «**индикаторных элементов**» (ИЭ). На процесс измерения накладываются некоторые условия, или ограничения S. Например, как двигаться вдоль отрезка AB: только слева-направо или в произвольном порядке. На каждом шаге использование (приложение) ИЭ дает два варианта исхода: правый край ИЭ оказался либо левее, либо правее точки X.

Показания на ***предыдущих*** шагах и ограничения S влияют на ***последующие*** шаги. И в **математической модели взвешивания** тоже есть свои ограничения S. Например, разновески можно помещать либо только на одну чашу рычажных весов, либо на обе чаши. Забегая вперед, отмечу, что, как я понимаю, это ведет к алгоритмам либо в виде суммирующей рекурсии, либо в виде разностной рекурсии. А в целом такой подход означал, что в математику ворвалось КАЧЕСТВО, физическое свойство, доселе математике не ведомое. А такое взаимопроникновение когда-то искусственно разобщенных наук всегда ведет к крупным открытиям.

Итак, n – число шагов, k – количество «индикаторных элементов», S – число ограничений, а (n, k, S) – это обозначение алгоритма измерения, то есть системы формальных правил измерения длины отрезка AX.

Рассмотрены вначале **классические алгоритмы измерения**: «алгоритм счета», «двоичный алгоритм» и «алгоритм считывания». И, самое интересное, **каждому алгоритму отвечает своя система счисления**, отражающая результат измерения.

Алгоритм последовательного счета, или просто «**алгоритм счета»** использует один ИЭ (k=1) и реализуется за n шагов, с помощью которых отрезок AB разбивается на n+1 равных частей. Этот алгоритм измерения с глубокими математическими корнями лежит в основе «метода исчерпывания» Евдокса и «Евклидового определения» натурального числа N, которое представляется в виде суммы N единиц.



- Теперь понятно, откуда в сыре дырки берутся?

Алгоритм поразрядного кодирования, или просто **«двоичный алгоритм»** также использует один ИЭ (k=1) и реализуется за n шагов; при этом отрезок AB разбивается на 2^n равных частей. Этот алгоритм «порождает» двоичное представление числа, то есть «двоичную систему», лежащую в основе современной информационной технологии: $A = \sum_i a_i 2^i$,

где a_i {0,1} - двоичная цифра, а 2^i-вес i-го разряда. Именно этот «двоичный алгоритм» лежит в основе работы всех современных компьютеров.

«**Алгоритм считывания»** реализуется всего за один шаг (n=1), но использует «k» ИЭ; при этом отрезок AB разбивается на k+1 равных частей.

Автором показано, что каждое «ограничение» S приводит к разработке того или иного класса оптимальных алгоритмов измерения, представляющих теоретический или практический интерес. Поиск разумных «ограничений», накладываемых на алгоритм, является важной задачей алгоритмической теории измерения.

Каждый алгоритм измерения в теории проф. Стахова задает свою систему счисления, в которой нумеруется результат измерения – искомое число.

Перефразируем известное выражение и получим: «***Назови твой алгоритм измерения, и я скажу, в какой системе счисления ты получишь результат***».

При бесконечном числе шагов измерения, то есть при измерении "до точки", алгоритм не влияет на конечный результат измерения. Выбор алгоритма произволен и, как правило, сводится к «десятичному» или «двоичному» алгоритму.

При конечном числе шагов измерения, то есть при измерении "до интервала погрешности", от алгоритма измерения зависит точность измерения, то есть отношение исходного интервала неопределенности к интервалу неопределенности на последнем шаге измерения.

Таким образом, конструктивный подход к теории измерения привел к совершенно новой математической задаче поиска оптимальных алгоритмов измерения. А решение такой задачи привело к развитию алгоритмической теории измерения доктора Стахова.

Автор обобщил так называемую задачу Баше – Менделеева. Речь идет об определении наименьшего количества гирь (разновесков), с помощью которых можно получить любой целый вес в заданном диапазоне измерений.

Обобщение задачи Баше-Менделеева состояло в увеличении рычажных весов от 1 до k (k – натуральное число), причем на левые чаши всех весов положен один и тот же груз. Такая ситуация соответствует случаю «параллельных измерений», когда одна и та же измеряемая величина сравнивается с «эталонными величинами» с помощью «k» компараторов, и широко используется при измерении электрических величин.

Обобщенная «задача о гирях» может быть сформулирована так: требуется найти оптимальный n-шаговый алгоритм взвешивания (измерения) с помощью системы из **«k»** рычажных весов (**компараторов**), обладающих **«инерционностью» «р»**, при условии, что на каждом шаге измерения гири (эталонные величины) разрешается помещать на свободные чаши тех и только тех компараторов, которые находятся в исходном положении «больше». Такая задача является гораздо более сложной, чем классическая «задача о гирях» Фибоначчи из 13-го века для случая k=1 и р=0.

Показано, что логика взвешивания, или любого сравнения с помощью рычажных весов «**несимметрична**». Если получен сигнал "больше" (правая чаша перевесила) действия «весовщика» оказываются "сложнее" по сравнению с получением сигнала "меньше" (левая чаша всё еще перевешивает). Во-первых, «весовщик» должен снять гирю, во-вторых, учесть время, затраченное на установку весов в исходное положение. Это свойство измерения позволило автору сформулировать «принцип асимметрии измерения».

Учет восстановительного периода в математической модели измерения и его алгоритме является центральной идеей АТИ. Согласно «принципу асимметрии измерения», **мы должны ждать «р» шагов, пока «рычажные весы» не возвратятся в исходное положение**.

Такая идея применения **«инерционности» р**, кстати, позволила подтвердить глубокий физический смысл р-чисел Фибоначчи, обогативших теорию «золотого» сечения. **Обобщение – это квинтэссенция исследований**. И когда был получен алгоритм измерения в самом общем виде, для произвольного значения **«**инерционности**» р**, ученые поняли, что они на правильном пути.

Ведь при **р=0** «общий» алгоритм измерения превращался в классический «двоичный алгоритм» для расчета последовательности степеней двойки 1, 2, 4, 8, 16, …, то есть к системе счисления с основанием «2».

Случай **р=1** привел к алгоритму для расчета числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … , известной как ряд Фибоначчи.

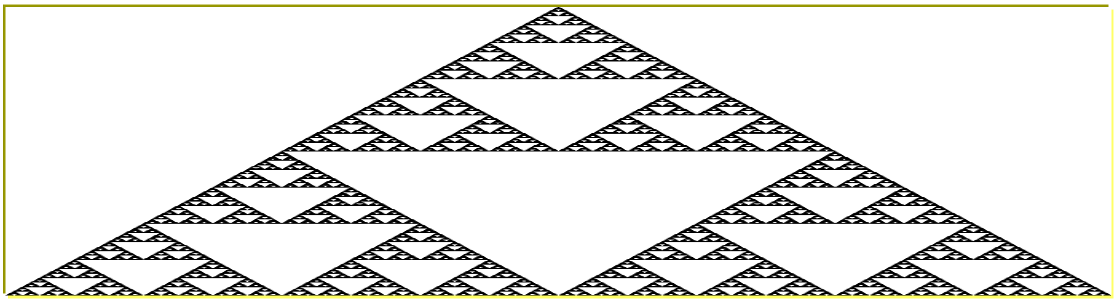
А при **р=**∞ «общий» алгоритм преобразовался в алгоритм натурального ряда чисел 1, 2, 3, 4, 5, …

Все эти словесные описания алгоритмов, возможно, более понятны людям, не привыкшим к математическим символьным записям. Но они более громоздки и менее четки, чем формальные описания. А если мы перейдем к формальным описаниям, то есть попросту говоря, к формулам, увидим её Величество **РЕКУРСИЮ**.

Объект называется рекурсивным, если он определен с помощью самого себя. Рекурсия - это функция, которая вызывает саму себя. Процесс повторения чего-либо самоподобным способом. «Смысл жизни — в достижении её цели, цель жизни — в наполнении её смыслом».

В фильме «12 друзей Оушена» представлен интересный пример рекурсии: Джулия Робертс сыграла героиню, которая по сюжету фильма играла Джулию Робертс.

Рекурсия — это жемчужина теории алгоритмов, и это первое, с чем знакомят школьников в информатике (сразу после процедур ввода и вывода данных, элементарных арифметических операций, оператора цикла и условного оператора). В математике и информатике рекурсия находит наиболее общее применение. Здесь она является методом определения функций, при котором определяемая функция применена в теле своего же собственного определения. При этом бесконечный набор случаев (значений функции) описывается с помощью конечного выражения. Практически все геометрические фракталы задаются в форме бесконечной рекурсии (пример – треугольник Серпиньского).



Итак, повторим последние выводы, применяя рекуррентные соотношения. Так вот, алгоритм измерения в самом общем виде, для произвольного значения **«инерционности» p,** выглядел в виде следующей рекурсии: $\mathbf{f_n=f_{n-1}+f_{n-p-1}}$.

При p=0 алгоритм измерения превращался в рекурсию 1-го рода, соответствующую геометрической прогрессии со знаменателем q=2: $\mathbf{f_n=2f_{n-1}}$.

При p=1 он трансформировался в известнейшую рекурсию $\mathbf{f_n=f_{n-1}+f_{n-2}}$**,** генерирующую ряд Фибоначчи. А заодно и в новую систему счисления, основанием которой является «золотая» иррациональная константа Φ≈1,618.

При p>1 основанием новых систем счисления являются иррациональные числа Φ_p. Коды золотой p-пропорции стали основой для концепции «золотой» теории чисел.

…Представляю, каково было изумление и, в какой-то мере, разочарование автора, когда он обнаружил в математической литературе, что частный случай новой теории, а именно - система счисления с иррациональным основанием Φ (случай p=1), уже известен. Его открыл в 1957 году двенадцатилетний американский вундеркинд Джордж Бергман…

Что поделать, идеи витают в воздухе, а воздух – один на всю планету. Как тут не поверить в коллективный разум человечества! Но ведь главное – что было дальше, после выдвижения идеи. А дальше Д. Бергман стал ученым, но открытой им системой счисления уже не интересовался, поскольку не увидел её практического применения. А Алексей Стахов продолжил работу, поскольку перед ним стоял образ нового компьютера – компьютера Фибоначчи и новой математики – математики гармонии.

3. Системы счисления с иррациональными основаниями

Античные греки, решая равнобедренные прямоугольные треугольники и квадраты, определяя длины гипотенуз и диагоналей, вышли на иррациональные числа. Эти числа можно коротко обозначить (например, $\sqrt{2}$ – при единичных длинах катетов или сторон), но их нельзя точно воспроизвести, со всеми бесконечными знаками после запятой.

Иррациональное число «золотой» пропорции, или, иначе, «золотую» константу Ф, тоже можно назвать коротко, скажем, так: «половина от увеличенного на единицу корня из пяти». Но и это число нельзя точно, со всеми знаками, воспроизвести…

Это дало основания известному немецкому математику Леопольду **Кронекеру** (1823–1891), который **ошибочно считал, что только арифметика обладает подлинной реальностью**, сказать: "Натуральный ряд чисел создал Бог, все остальное - придумали люди". Возникает законный вопрос: а почему же трансцендентное число "е", которое (в отличие от Ф) коротко и назвать-то нельзя (разве что для начала числа - «Экспоненту помнить способ есть простой: два и семь десятых, дважды Лев Толстой»), кличут "основанием **натурального** логарифма"? Ответ, очевидно, такой: потому что число "е" и основанные на нем логарифмы в природе (натуре) встречаются так же часто, как и натуральные числа.

Безусловно, никто не использует иррациональные числа при расчете *налогов* или в декларации о доходах. Однако, никто еще не находил и натуральные числа, растущие на кустах или деревьях, никто еще не встречал их бегающими на четырех или двух лапах. Натуральные числа даже не летают. Конечно, эти числа легче воспринимаются (даже в детском саду), и до них легче было человеку «дойти». Гораздо легче, чем до числа «ноль», чем до отрицательных, дробных, иррациональных, комплексных или трансцендентных чисел. Но все эти числа, начиная с натуральных, являются продуктом мышления человека. **Числа (любые) изобрели люди.**

Почему же до сих пор, даже в некоторых современных статьях, можно прочитать, что система счисления на натуральных числах служит Богу, а система счисления на иррациональных числах служит Кесарю, или даже Дьяволу?

У меня есть свой, субъективный вариант ответа на данный вопрос.

Считать мы все, хотя бы понемногу, умеем. Если нет – пользуемся *калькулятором*. Но есть и такие, которые не только считать умеют, а и много размышляют о числах. Это – ученые.

По виду зависимости между Воображением и Соображением ученые делятся на две категории: это «**параболические**» и «**гиперболические**» ученые.

Каноническое уравнение параболы: $y^2=2kx$, где k – постоянный параметр. А уравнение равносторонней гиперболы: $y=k/x$, где k – постоянный параметр. Пусть аргумент «x» – это Воображение, а функция «y» – это Соображение. Когда мы пытаемся вообразить бесконечное иррациональное число, естественно, Воображение «x» разыгрывается раз в 100 больше, чем когда мы думаем о натуральном числе. Но тогда Соображение «y» «параболического» ученого, согласно формулам, возрастает в 10 раз, а Соображение «гиперболического» ученого - уменьшается в 100 раз. Разброс – на 3 порядка. И «гиперболический» ученый буксует.

Но на экспансивных «гиперболических» ученых нельзя обижаться. Такими их сотворил Бог. Как говорится, Богу – Богово, Кесарю – Кесарево, слесарю – слесарево.

Нужно понимать, что бесконечность бесконечности – рознь, и в общем случае потенциальная бесконечность существует. Например, нет пределов человеческому совершенству, как и нет пределов человеческой глупости.

Однако, перейдем к тому, что гораздо интереснее - к иррациональным числам.

Иррациональное число ничем не хуже натурального. А где-то, по большому счету, в отдельно взятых случаях может быть в чем-то и лучше… (Шутка!).

Денис Клещев пишет:

«*поскольку числовое значение единичного отрезка присваивается в геометрии произвольно, поскольку в ней действует равноправие систем отсчета, то никакого труда не составляет обозначить диагональ квадрата АС=1,414… в некоторой новой системе отсчета за единичный отрезок и получить в общем виде следующее «нестандартное» выражение* $\sqrt[2]{2}\rightarrow 1$» [6].

То есть вполне можно за единицу измерения или счета принять любое иррациональное число, скажем, «золотую» константу Ф, что и сделано в кодах Фибоначчи. А для чего? Есть ли преимущества у кодов Фибоначчи и каковы они?

Займусь-ка я «автоплагиатом», поскольку сейчас не отвечу на этот вопрос лучше, чем сделал это без малого четверть века назад. Из «Бесед о метрологии» [4, с. 67]:

«*Понятие числа в древности было неотделимо от понятия измерения. И в наши дни оказался плодотворным переход от алгоритмов измерения к проблеме кодирования чисел. Мало того, что двочные и десятичные системы счисления оказались частными случаями общей стройной теории. Новый подход привел к новой системе счисления – с основаниями в виде рядов Фибоначчи. /…/*

Двоичная нумерация дает прекрасный способ кодирования чисел. Но в мире нет ничего идеального. Как говорится, и на Солнце есть пятна. Один из недостатков двоичной системы связан с «проблемой соседей». Два соседних числа в натуральном ряду чисел могут различаться в большинстве двоичных разрядов. Например, числа 15 и 16 в двоичной системе выглядят так: 01111 и 10000. Различие во всех пяти разрядах! При переходе от одного такого числа к другому, параллельно во времени происходит большое количество переключений двоичных электронных элементов, соответствующих отдельным разрядам кода. Скорости переключения элементов очень высоки. Время переключений исчисляется микросекундами. Скорости хоть немного отличаются в разных разрядах между собой. При большом числе переключений возникают «состязания» между разрядами, результатом которых нередко являются сбои.

Расположим несколько чисел Фибоначчи в порядке их убывания: 13; 8; 5; 3; 2; 1; 1. Теперь запишем числа 15 и 16 в коде Фибоначчи:

$15=1\cdot 13+0\cdot 8+0\cdot 5+0\cdot 3+1\cdot 2+0\cdot 1+0\cdot 1$ *(результат – 1000100);*

$16=1\cdot 13+0\cdot 8+0\cdot 5+0\cdot 3+1\cdot 2+0\cdot 1+1\cdot 1$ *(результат – 1000101).*

Отличие только в одном разряде. Но и число разрядов увеличилось. В двоичном коде было использовано 5 разрядов, а в коде Фибоначчи – 7. Это значит, что код Фибоначчи обладает избыточностью. «Лишние» разряды дают возможность одно и то же число записывать в коде Фибоначчи несколькими способами. Например, нетрудно убедиться, что число 16 можно записать еще пятью способами: 1001000; 0111000; 1000110; 0110101; 0110110.

Если в процессе измерения выйдет из строя какой-нибудь разряд, например, отвечающий за число Фибоначчи 13, то измерение всё равно будет произведено правильно, поскольку разряд 13 будет автоматически заменен двумя соседними разрядами 8 и 5. Проводя измерения одной и той же величины несколько раз с помощью разных разрядов, легко выявить неисправность. Таким образом повышается «живучесть» аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей – основы современной цифровой измерительной техники. Все процессы в кодах Фибоначчи становятся контролируемыми, потому что при записи чисел в так называемой нормальной форме каждую единицу окружают «телохранители» – нули. Наиболее опасны ошибки при нарушении синхронизации. Если одна из последовательностей сдвинулась на один разряд влево, то число 8 будет принять за 13, число 5 – за 8 и т.д. Оказалось, что нормальные коды Фибоначчи имеют высокие самосинхронизирующие свойства и не допускают опасных сдвигов.

Погрешности цифрового двоичного преобразователя в пределах его диапазона имеют скачкообразный закон распределения вероятностей их появления. В цифровых преобразователях *по коду Фибоначчи распределение вероятностей погрешностей можно сделать гладким, как шоссейную дорогу, что существенно облегчает контроль и нормирование погрешностей.*

Итак, в специальных случаях, когда требуется очень высокая достоверность результатов измерений и вычислений, в технике вместо двоичных кодов используются коды Фибоначчи, так тесно связанные с «золотой» пропорцией и понятием красоты у древних греков и последующих поколений.

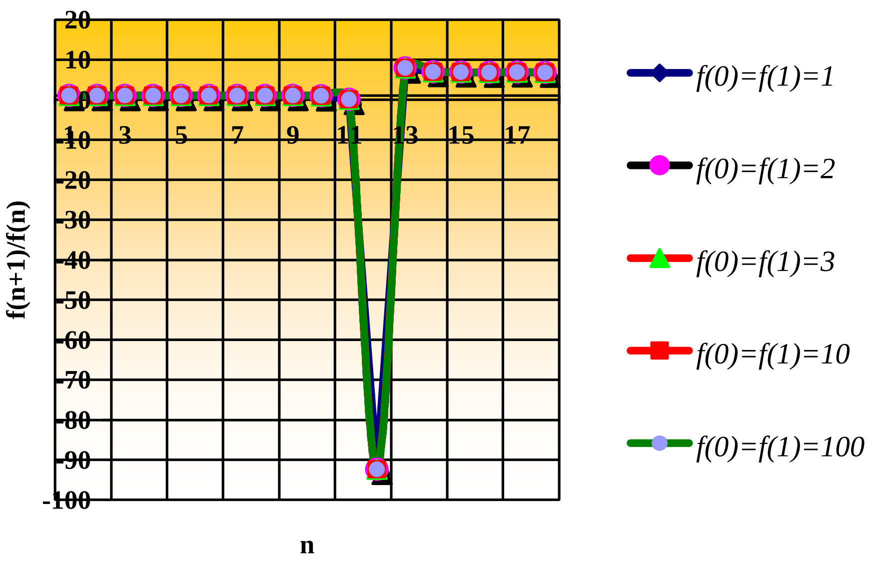
Четкая симметрия существует между числами в десятичной и двоичной формах. Здесь каждому числу соответствует только один обязательный код. Эти симметрия и однозначность нарушаются, как мы убедились, при переходе к гибкому избыточному коду Фибоначчи, несущему нюансы и неопределенности воплощения в различные формы. Двочный машинный код можно уподобить физиономии с абсолютно строгими и симметричными чертами, с красотой, которую часто называют «кукольной». Тогда код Фибоначчи следует сравнить с живым лицом, которое не отличается ни абсолютной правильностью черт, ни абсолютной их симметрией. Возможно, так проще «перебросить мост» из сферы кодов в мир прекрасного».

Продолжу «нести отсебятину». Любой читатель, изучавший геометрию и помнящий теорему Пифагора, согласится, что если длина стороны квадрата равна натуральному числу «а», то длина диагонали квадрата равна «а√2» и выражается, следовательно, иррациональным числом. То есть, точная ортогональность и абсолютное равенство сторон квадрата порождают иррациональность – бесконечность цифрового выражения диагонали квадрата. **Любой паре равных натуральных чисел в квадрате соответствует по меньшей мере одно иррациональное число**.

Попробуем провести необычную аналогию между этим известным тысячи лет свойством квадрата и открытым недавно «эффектом бабочки» у Золотого Сечения [7]. Дело в том, что **любой паре равных натуральных чисел, используемой в качестве начальных условий для так называемой В-рекурсии ЗС, отвечает «эффект бабочки», если переменный параметр этой рекурсии по своему значению близок к иррациональному числу Φ^2**.

При указанном «эффекте бабочки» значение отношения $\mathbf{f_{n-1}/f_n}$ выражается бесконечным рядом иррациональных чисел, а при определенном значении «n» стремится к отрицательной бесконечности, как это показано на Рисунке 6 из [7].

Рис. 6 из [7]. Переходные процессы для d=2.61803399 и совпадающих значений f(0) и f(1)



Абсолютные значения начальных условий f_0 и f_1 в указанном эффекте не играют никакой роли. Главное: их **равенство f_0=f_1, и критическое значение параметра «d», равное примерно Φ^2.** Они и играют решающую роль в возникновении «эффекта бабочки» в ЗС.

Таким образом, противоположности «рациональность – иррациональность», «точность – неточность» тесно связаны в различных условиях разных задач и легко переходят друг в друга.

Недаром в народе говорят: «От любви до ненависти – один шаг». А от рациональности до иррациональности в «эффекте бабочки» и того меньше: какая-то миллиардная доля шага…

4. О математике гармонии

В последней, 8-й части «Основные математические результаты, приложения и перспективы развития математики гармонии» рецензируемой статьи А.П. Стахов подчеркнул наиболее яркие страницы математики гармонии.

Автор отметил, что известный и ранее термин **«математика гармонии»** был использован им для того, чтобы подчеркнуть оригинальность работ славянских ученых по сравнению с работами американских математиков-фибоначчистов**.**

… *математика гармонии, включающая в себя АТИ и коды золотой пропорции, является новым междисциплинарным направлением современной науки, которое может быть положено в основу новой математики, лишенной противоречий.*

…понимание «математики гармонии» изменялось на разных этапах ее развития.

К числу результатов в области «Обобщенной теории золотого сечения-1», проф. Стахов отнёс следующее:

Фибоначчиевые алгоритмы измерения привели к получению так называемых p-кодов Фибоначчи /…/ Эти коды, в свою очередь, породили арифметику Фибоначчи…, которая стала источником изобретений в области компьютеров Фибоначчи, запатентованных за рубежом (США, Япония, Англия, Фракция, ФРГ, Канада и др. страны). Эти патенты сохраняют свою актуальность до настоящего времени в связи с развитием микропроцессорной техники.

От себя добавлю о компьютерах Фибоначчи такую тривиальную мысль. Любой текст, как известно, обладает избыточностью. И небольшие искажения ему не страшны. Другое дело - цифровое управление. Объектами, от которых зависят людские жизни, в космической технике, например. Тут искажения недопустимы.

Коды – это те *шестеренки*, через которые передается информация от человека управляемому объекту. Вот тут-то и нужна высочайшая помехоустойчивость кодов – шестеренок. Ни один зубчик не должен сломаться. Ни один символ не должен исказиться или исчезнуть. Ошибки I-го и II-го рода должны быть здесь минимальны. Вот тут-то и нужны коды Фибоначчи, которые сами себя проверяют. Ибо они избыточны, в отличие от двоичных кодов.

Но в технике всегда выигрыш в одном направлении сулит проигрыш в другом. Где же проигрыш? В быстродействии. Однако, проигрыш в быстродействии не настолько велик, чтобы в большинстве случаев цифрового управления нельзя было работать в режиме реального времени. Быстродействие должно позволить обезопасить людские жизни и самые дорогостоящие «беспилотные» образцы современной техники.

Продолжим конспективное перечисление результатов в области «Обобщенной теории золотого сечения-1» (по Стахову):

…Системы счисления с иррациональными основаниями … переворачивают наши представления о системах счисления; более того - соотношение между рациональными и иррациональными числами. В этих системах на первый план выдвигаются иррациональные числа – золотые p-пропорции, Φ_p (p=1,2,3,…) которые являются основанием, началом всех чисел, так как с их помощью может быть представлено любое действительное число!

…Еще одним новым научным результатом, полученным до 1996 г., является новая геометрическая теория филлотаксиса, созданная украинским архитектором Олегом Боднаром. Эта теория основывалась на так называемых «золотых» гиперболических функциях, которые с точностью до постоянного коэффициента совпадают с гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка.

…Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка были введены Алексеем Стаховым и Борисом Розиным в 2005 г.

…В 2005 г. международный журнал "Chaos, Solitons & Fractals" опубликовал статью Алексея Стахова и Бориса Розина "The Golden Shofar". Статья посвящена теории функции 2-го порядка, основанной на «золотом сечении». Функция вытекает естественным образом из симметричных гиперболических функций Фибоначчи. …Анализ новейших … данных по космическому микроволновому фону (реликтовое излучение), которые являются своего рода «снимком» Вселенной, … позволил вывести уравнения, определяющие кривизну и топологию Вселенной в больших масштабах. …резонной является гипотеза, что по своей форме Вселенная является «шофароподобной».

… выведена обобщенная формула Бине для p-чисел Фибоначчи.

… разработана новая теория избыточного кодирования, основанная на матрицах Фибоначчи.

… введены новые классы гиперболических функций – гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка, которые являются расширением формул Газале … на непрерывную область. … указанные гиперболические функции являются широким обобщением.

…В статье Алексея Стахова и Самуила Арансона … дано оригинальное решение 4-й проблемы Гильберта.

…треугольник Паскаля является фундаментальным математическим объектом, который лежит в основе математики гармонии – нового междисциплинарного направления современной науки.

Так можно ли считать, что математика гармонии – это алгоритмическая теория измерения плюс системы счисления с иррациональными основаниями ? Конечно, нельзя. Да и автор, судя по процитированным достижениям МГ, так не считает.

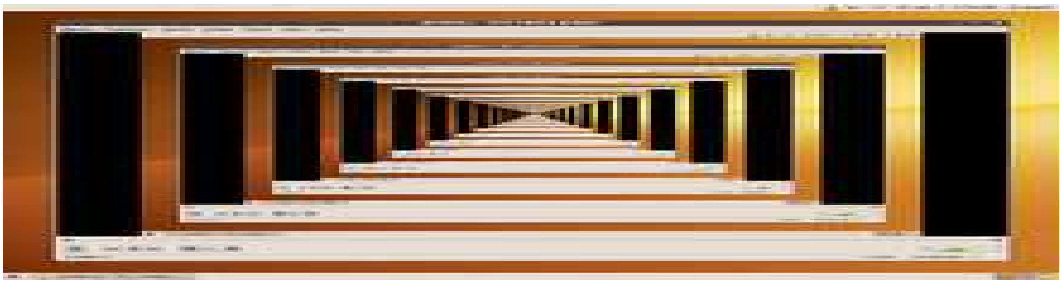
Я бы добавил в МГ «алгоритмическую теорию счета», хотя таковой в науке вроде бы нет. А, наверное, должна быть. Алгебраические принципы имеют такое же отношение к реальности, как и геометрические. Алгоритмы счета так же важны, как и алгоритмы измерения. Особенно важна, на мой взгляд, «алгоритмическая теория счета» в школьном образовании, когда детей учат азам алгебры. В то же время **«…** *бесспорной истиной остается одно: за последние столетия в Европе математика развивалась исключительно как геометризированная дисциплина. Ее основной продукт - дифференциальное и интегральное исчисление, где разрабатывался аппарат оперирования с бесконечно малыми величинами, что позволило совершить колоссальный рывок в технике*» [5].

Пока еще недостаточно изучаются учащимися и школ, и университетов простые рекурсии 2-го порядка. А ведь рекурсия - это одна из фундаментальных концепций в математике и программировании, это одна из форм мышления, это мощное средство, позволяющее строить элегантные и выразительные алгоритмы.

Рекурсивное определение чисел Фибоначчи $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ проще, чем известное формальное выражение:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

В физике классическим примером бесконечной рекурсии являются два поставленных друг против друга зеркала: в них образуются два коридора из затухающих отражений зеркал.



Другим примером бесконечной рекурсии является эффект самовозбуждения (положительной обратной связи) у автогенераторов.

Рене Декарт в 1637 году пытался найти основу для нашей способности накапливать знания о мире и сформулировал её так: «Мыслю, следовательно, существую». Это один из известных примеров рекурсии – вложенности идеи в идею. Рекурсия делает нас людьми. Таков главный тезис книги профессора психологии Майкла Корбаллиса из Новой Зеландии «Рекурсивный разум: происхождение человеческого языка, мысли и цивилизации» (Recursive Mind: The origins of human language, thought, and civilization).

Эта работа отрицает устоявшиеся понятия о языке и мышлении, в частности, что мысль есть принципиально языковое явление. Согласен: ведь мыслят и животные. Хотя, вероятно, они имеют свой язык. Но они мыслят и молча, без слов. Это может подтвердить любой «собачник».

«Спиноза справедливо считал, что существуют не два противоположных предмета, тело (природа) и мышление, а два атрибута одной субстанции, два разных способа существования целого. В человеке мыслит та же материя, которая простирается вокруг». [8]. Материя вокруг также использует рекурсии.

Рекурсия помогла нашим предкам побороть линейность времени, говорит г-н Корбаллис. Именно благодаря рекурсии, находясь в настоящем, мы обдумываем прошлое и прогнозируем будущее. Мы также можем смешивать реальное и вымышленное. Для развития науки нужна долговременная память социума.

Использующее рекурсию определение называется индуктивным.

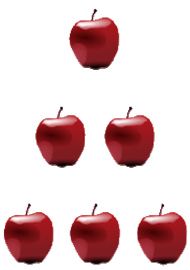
Одним из примеров такого определения является аксиоматическое построение множества натуральных чисел.

Множество натуральных чисел принято обозначать знаком $\mathbb{N}$. Множество $\mathbb{N}$ является бесконечным, так как для любого натурального числа найдётся большее его натуральное число.

Покажем, как можно простейшим образом формально задать привычный всем натуральный ряд чисел (а также любую арифметическую прогрессию) с помощью **рекурсии**.

Вспомним главную парадигму Пифагора: «***Начало всего – единица. Единице, как причине, принадлежит неопределённая двоица /…/. Из единицы и неопределённой двоицы исходят числа; Из чисел-точки. Из точек-линии; Из них-плоские фигуры; Из плоских-объёмные фигуры; Из них-чувственно воспринимаемые тела***».

Многие авторы выбирают «**Единицу**» или «**Монаду**» в качестве «**первочисла**» как символ «целостности» всего сущего. Вот и мы начнем с **единицы**.



Примем, что аттрактор «а» равен единице: **а=1**. Теперь используем неопределённую двоицу, посчитав, что таких единичных аттракторов у нас двое. Тем самым мысленно обратимся к рекурсиям 2-го порядка и свойствам корней их уравнений. Характеристическое уравнение такой рекурсии должно быть таким: $\mathbf{(a-1)(a-1)=0}$. А дальше – элементарная алгебра. Раскрываем скобки: $\mathbf{a^2-2a+1=0}$. Или $\mathbf{a^2=2a-1}$. И, наконец, сама простейшая, но воистину чудесная рекурсия: $\mathbf{f_{n+2}=2f_{n-1}-f_n}$.

Ясно, что если мы выберем в качестве начальных условий две последовательные степени аттрактора ($\mathbf{f_0=1^0}$; $\mathbf{f_1=1^1}$), то в качестве числовой реализации рекурсии $\mathbf{f_{n+2}=2f_{n-1}-f_n}$ получим бесконечный ряд степеней аттрактора [9]. Но, поскольку аттрактор единичен, то мы и получим бесконечный ряд единиц: **1; 1; 1; …1; …** .

Для начальных условий $\mathbf{f_0=2}$; $\mathbf{f_1=2}$ получим бесконечный ряд двоек: **2; 2; 2; …2; …** .

Гораздо «продуктивнее» такие начальные условия: $\mathbf{f_0=1}$; $\mathbf{f_1=1+r}$. Здесь **r** – это разность арифметической прогрессии. Пусть **r =1**. Тогда в качестве числовой реализации рекурсии $\mathbf{f_{n+2}=2f_{n-1}-f_n}$ получим натуральный ряд чисел. Действительно, $\mathbf{f_0=1}$; $\mathbf{f_1=1+r=2}$; $\mathbf{f_3=2\cdot2-1=3}$; $\mathbf{f_4=2\cdot3-2=4}$; **…** .

Примем, что **r=2**. Тогда рекурсия $\mathbf{f_{n+2}=2f_{n-1}-f_n}$ генерирует бесконечный ряд нечетных чисел натурального ряда: **1; 3; 5; …2n+1; …** .

Пусть **r=2**, но $\mathbf{f_0=2}$. Тогда рекурсия $\mathbf{f_{n+2}=2f_{n-1}-f_n}$ генерирует бесконечный ряд четных чисел натурального ряда: **2; 4; 6; …2n+2; …** .

При произвольном значении **r** таким путем получаем любую арифметическую прогрессию с разностью, равной **r**.

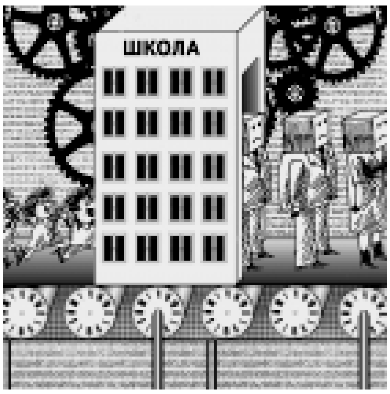
А как формально определить, что такое геометрическая прогрессия? С помощью любой рекурсии 2-го порядка, кроме только что использованной $f_{n+2}=2f_{n-1}-f_n$ для натурального ряда и арифметических прогрессий, это сделать очень просто. Действительно, при $\mathbf{f_0=x^0}$; $\mathbf{f_1=x^1}$, где x – аттрактор рекурсии и знаменатель геометрической прогрессии, с учетом характеристического уравнения $\mathbf{x^2=k1\cdot x+k2}$ получаем: $\mathbf{f_0=1}$; $\mathbf{f_1=x}$; $\mathbf{f_2=k1\cdot x+k2\cdot 1=x^2}$; $\mathbf{f_3=x^3}$; **…** $\mathbf{f_n=x^n}$; **…** .

Таким образом, рекурсия способна творить чудеса. И прогрессии школьникам удобно объяснять именно с помощью рекурсий, с которыми учащиеся встречаются в курсе информатики и программирования. Рекурсия может служить связующим звеном для разных разделов науки.

Человек всегда стремился формализовать удобные алгоритмы счета, записать их в самой краткой форме. Рекурсия – отличный инструмент для этого!

Что касается образования – это один из самых «больных» вопросов современности. В школу приходят почти нормальные дети, лишь слегка испорченные унифицированным детсадовским образованием. Каждый из детей всё же индивидуален. Зато из *школы* выходят роботизированные юноши и девушки. Ведь они старательно зубрили схоластическую математику, оторванную не только от практики реальной жизни и искусства, но и от точных наук. Дети разучились мыслить, задавать вопросы.

Между математикой и другими науками, между математикой и искусством нужно спешно наводить мосты и переправы, везде, где это возможно. Чтобы спасти учащихся и математику. Этот процесс, благодаря стараниям проф. Стахова, уже пошел. В школах и университетах понемногу начали внедрять МГ.



В статье «Концепция гармоничного образования и школы будущего (реплика на публикацию Т.Г. Константиновой «Математика и гармония окружающего мира»)» [3] автор пишет:

«*Современная педагогическая практика сделала мощный рывок вперед. …*

В математическом образовании, источником которого являются «Начала» Евклида, по неизвестным причинам произошел явный «перекос». И наш первый шаг для исправления этого «перекоса» состоит в том, чтобы ввести в школьную "Геометрию" раздел "Золотое Сечение". В этом разделе школьникам будет интересно узнать об алгебраических и геометрических свойствах «золотого сечения», в частности, о "золотом" прямоугольнике, пентаграмме, "Платоновых телах" и т.д.

Переходим к "Алгебре". Здесь школьники изучают алгебраические уравнения и методы их решения. Но для школьников интересно узнать о специальном классе алгебраических уравнений - "уравнениях золотой пропорции". И мы имеем полное право ввести в "Алгебру" небольшой раздел "Уравнения золотой пропорции".

В той части школьного курса математики, которая посвящена "Теории чисел", было бы разумным ввести специальный раздел "Числа Фибоначчи".

В курсе «Информатика» обязательно необходимо ввести разделы «Коды Фибоначчи» и «Системы счисления с иррациональными основаниями».

Переходим к наукам о Природе - физике, химии, астрономии. В курсе "Физики" при изучении кристаллов желательно ввести раздел "Квазикристаллы", основанные на "икосаэдрической" симметрии, тем более, что наши школьники уже знают об икосаэдре из курса "Геометрии".

В курсе "Химии" целесообразно обратить внимание школьников на химические соединения, построенные "по Фибоначчи" и на новую интерпретацию Периодической системы, предложенную Сергеем Якушко.

А в курсе "Астрономии"обязательно необходимо рассказать школьникам о "резонансной теории Солнечной системы", основанной на «золотом сечении». Только таким путем школьники смогут понять причины устойчивости Солнечной системы.

Переходим к наукам о живой природе. Украшением курса "Ботаники" может стать раздел «Пентагональная симметрия» Природа дает огромное количество подтверждений существования этой закономерности и это обстоятельство является одним из важнейших аргументов существования гармонии в живой природе. Еще один чрезвычайно интересный раздел – это ботаническое явление филлотаксиса, которое волнует науку со времен Кеплера.

… И мы снова и снова убеждаемся в том, что все в природе подчинено единому плану, единому «Закону Золотого Сечения» – и раскрыть и объяснить этот фундаментальный закон природы во всех его проявлениях и есть главная задача науки. А сколько интересных возможностей для демонстрации закономерностей, основанных на «золотом сечении» и числах Фибоначчи, дает нам цикл гуманитарных дисциплин, в частности, скульптура, архитектура, живопись, поэзия. …

Но радикальным решением в области школьного образования является введение специальной дисциплины "Гармония систем", которую можно было бы рассматривать как завершающую дисциплину физико-математического и эстетического образования учащихся. Главной задачей такой дисциплины является формирование у школьников нового научного мировоззрения, основанного на принципах Гармонии и Золотого Сечения. Программа этой дисциплины зависит от специализации школьников. В таком курсе все школьные предметы по математике, естествознанию и искусству объединяются вокруг главной идеи – идеи Гармонии Мироздания».

Остается надеяться на успех МГ и делать всё возможное для того, чтобы идея Гармонии Мироздания пронизала мировую науку и образование.

В целом же МГ напоминает сейчас широкое мозаичное полотно. Безусловно, МГ далека от завершения и совершенства. Но она находится на правильном пути.

Литература:

1. Стахов А.П., Конструктивная (алгоритмическая) теория измерения, системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17205, 10.01.2012
2. Абачиев С. К., «Концепции современного образования», серия: Высшее образование, Ростов-на-Дону: Издательство Феникс, 2012 г., ID 7294948, ISBN 978-5-222-18878-1
3. Стахов А.П., Концепция гармоничного образования и школы будущего (реплика на публикацию Т.Г. Константиновой «Математика и гармония окружающего мира») // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.17216, 14.01.2012
4. Владимиров В.Л. Беседы о метрологии. – М.:Издательство стандартов, 1988. -168 с.
5. Павел Полуян, Тайна сакрального полумесяца. От алгебры до геополитики, http://arbuz.uz/t_tayna.html
6. Денис Клещев, Девятые Врата стандартной Математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17203, 10.01.2012
7. Владимиров В.Л., Бриллиант Золотого Сечения засверкал «эффектом бабочки» благодаря исключительному свойству числа Фидия // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17119, 19.12.2011
8. Попов В.П., Крайнюченко И.В., Знание и реальность // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17219, 15.01.2012
9. Владимиров В.Л., Стахов А.П. Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16523, 22.05.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321199.htm